109 91 41

ORTAOKUL
MATEMATİK
3

Yazan:
Mehmet SALAN

ÜÇÜNCÜ BASILIŞ

M.E.B.

DEVLET KİTAPLARI

MİLLİYET OFSET TESİSLERİNDE BASILMIŞTIR

MİLLİ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI..... : 109
DERS KİTAPLARI DİZİSİ..... : 91
ORTAOKUL KİTAPLARI..... : 41

Güçsüz beyinler, yetersiz gözler
gerçeği kolaylıkla göremezler.
ATATÜRK

"Her hakkı saklıdır ve Millî Eğitim Bakanlığı'na aittir. Kitabın metin, soru ve şekilleri kısmen de olsa hiçbir surette alınıp yayınlanamaz."

Millî Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu'nun 7.12.1982 gün ve 163 sayılı kararı ile ders kitabı olarak kabulü uygun görülmüş, Yayımlar Genel Müdürlüğü'nün 10.3.1983 gün ve 2511 sayılı emirleri ile 3. kez 150.000 adet basılmıştır.

İÇİNDEKİLER

BİRİNCİ BÖLÜM

REEL (GERÇEK) SAYILAR

	Konu	Sayfa
1.1.	Rasyonel sayıların yeniden gözden geçirilmesi	1
1.1.1.	Doğal sayılar kümesi	1
1.1.3.	Toplamanın özelikleri	4
1.1.4.	Doğal sayılar kümesinde çarpma işlemi	6
	Çarpma işleminin özelikleri	7
1.1.5.	Çıkarma, işlemi	9
1.1.6.	Bölme işlemi	10
1.1.7.	Tamsayılar kümesi	13
1.1.8.	Tamsayılar kümesinde toplama işlemi	15
1.1.9.	Toplama işleminin özelikleri	16
1.1.10.	Tamsayılar kümesinde çıkarma işlemi	18
1.1.11.	Tamsayılarda çarpma işlemi	20
1.1.12.	Çarpma işleminin özelikleri	21
1.1.13.	Tamsayılar kümesinde sadeleştirme işlemi	23
1.1.14.	Tamsayılarda kuvvet (güç) kavramı	23
1.1.15.	Rasyonel sayılar kümesi	25
1.1.16.	Rasyonel sayılar kümesinde toplama işlemi	26
1.1.17.	Toplamanın özelikleri	27
1.1.18.	Çıkarma işlemi	28
1.1.19.	Rasyonel sayılar kümesinde çarpma işlemi	29
1.1.20.	Çarpma işleminin özelikleri	29
1.1.21.	Rasyonel sayılar kümesinde bölme işlemi	31
1.1.22.	Rasyonel sayılarda kuvvet (güç) kavramı	32
1.2.	Rasyonel sayıların ondalık olarak gösterilmesi	34
1.2.1.	Rasyonel sayıların ondalık sayılara çevrilmesi	35
1.2.2.	Ondalık sayıların rasyonel sayılara çevrilmesi	37
1.3.	Sayı doğrusu üzerinde rasyonel sayılar	40
	Rasyonel sayıların yoğunluğu	41
1.4.	Rasyonel olmayan (irrasyonel) sayılar	44

İKİNCİ BÖLÜM

PERMÜTASYON, KOMBİNASYON VE OLASILIK

2.1. Pascal üçgeni 52
2.2. Permütasyon 56
2.2.1. Permütesyonları nasıl yazarız 58
2.2.2. Genel çarpma özeliği 62
2.2.3. Permütasyonun genel bir formülü 64
2.3. Kombinasyon 67
2.4. Olasılık 73
2.4.1. Olasılığın hesaplanması 73

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

BENZER ÜÇGENLER VE ORANTILI ÇOKLUKLAR

3.1. Dolaylı ölçme, oran ve orantı 90
3.1.1. Orantının özelikleri 91
3.1.2. Doğru parçaları arasındaki oran ve orantı 94
3.2. Benzer üçgenler 95
3.2.1. Üçgenlerin eşliği 95
3.2.2. Kenar açı kenar özeliği (K. A. K.) 97
3.2.3. Açı kenar açı (A. K. A.) özeliği 98
3.2.4. Kenar kenar kenar özeliği (K. K. K.) 99
3.2.5. Benzerlik kavramı 103
3.2.6. Üçgenlerin benzerliği 104
3.2.7. Üçgenlerde temel benzerlik özeliği 105
3.2.8. "A. A. A." benzerlik özeliği 106
3.2.9. "K. A. K." benzerlik özeliği 107
3.2.10. "K. K. K." benzerlik özeliği 107
3.3. Dik üçgenlerle Pisagor ve Öklit bağıntıları 113
3.3.1. Pisagor (Pythagoras) bağıntısı 113
3.3.2. Dik üçgenlerde Öklit bağıntıları 119
3.4. Trigonometrik oranlar 123
3.4.1. Önemli açılar 124
Trigonometrik oranlar tablosu 126
3.5. Bir doğrunun eğimi 131
3.5.1. Başlangıç Noktasından geçen Doğrunun Eğimi ve ... 131
Denklemi 131

3.5.2. $y = mx + n$ denkleminin grafiği 135
3.6. Doğru orantılı 138
3.7. Ters orantılı 143

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

DENKLEMLER

4.1. Özdeşlikler ve binom açılımı 152
4.2. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler 158
4.3. Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemler 163

BEŞİNCİ BÖLÜM

METRİK OLMAYAN GEOMETRİ

5.1. Basit geometrik şekiller 179
5.1.1. Basitçeliler 179
5.2. Çokyüzlüler 181
5.2.1. Bir boyutlu çokyüzlüler 183
5.2.2. İki boyutlu çokyüzlüler 185
5.2.3. Üç boyutlu çokyüzlüler 186
5.3. Köşelerin, yüzlerin ve ayrıtların sayılması 187

ALTINCI BÖLÜM

YÜZEY ÖLÇÜLERİ VE HACİMLERİ

6.1. Düzlem şekillerin alanları 196
6.1.1. Dikdörtgenin alanı 196
6.1.2. Karenin alanı 197
6.1.3. Paralelkenarın alanı 197
6.1.4. Eşkenar dörtgenin alanı 198
6.1.5. Üçgenin alanı 199
6.1.6. Yamuğun alanı 200
6.1.7. Düzgün bir çokgenin alanı 202
6.1.8. Dairenin alanı 203

6.2. Düzlemler ve doğrular 210
6.2.1. Düzlem 210
6.2.2. Doğru 210
6.2.3. Bir düzleme dik doğru 211
6.2.4. Bir noktanın bir düzleme uzaklığı 212
6.2.5. Parelel iki düzlem arasındaki uzaklık 213
6.3. Prizmalar 214
6.3.1. Dik prizmalar 214
6.3.2. Dikdörtgenler prizması 215
6.3.3. Küp 217
6.3.4. Dik üçgen dik prizma 218
6.3.5. Kare Dik prizma 220
6.3.6. Düzgün altıgen dik prizma 221
6.3.7. Eğik prizmalar 223
6.3.8. Paralelyüz 223
6.4. Piramitler 226
6.4.1. Düzgün piramit 227
6.4.2. Düzgün pramidin alanı 227
6.4.3. Düzgün piramidin hacmi 228
6.5. Koniler 231
6.5.1. Dairesel dik koninin alanı 231
6.5.2. Koninin hacmi 233
6.6. Küre 235
6.6.1. Büyük ve küçük daireler 236
6.6.2. Bir küçük çemberin uzunluğunun hesaplanması 238
6.6.3. Küre yüzeyinin alanı 239
6.6.4. Kürenin hacmi 239

KISALTMA VE SEMBOLLER

$\{...\}$: Küme işareti,

$\emptyset$, $\{\ \}$: Boş küme işareti.

$\in$: Elamanıdır işareti.

$\notin$: Elemanı değildir işareti.

$\supset$: Kapsama işareti.

$\subset$: Kapsanır anlamına gelen işaret.

$\not\supset$: Kapsamaz anlamına gelen işaret.

$\not\subset$: Kapsanmaz anlamına gelen işaret.

$\cup$: Birleşim işareti.

$\cap$: Kesişim işareti.

S : Sayma sayıları kümesi.

D : Doğal sayılar kümesi.

T+ : Pozitif tamsayılar kümesi.

T− : Negatif tamsayılar kümesi.

T : Tamsayılar kümesi.

R : Rasyonel sayılar kümesi.

G : Gerçek sayılar kümesi.

s (A) : A kümesinin elemanlarının sayısını gösterir.

$\neq$: Eşit olmama işareti.

$>$: Büyüktür işareti.

$\geqslant$: Büyüktür ya da eşittir işareti.

$<$: Küçüktür işareti.

$\leqslant$: Küçüktür ya da eşittir işareti.

$\approx$: Yaklaşık olarak eşit işareti.

$\equiv$: Denklik işareti.

$\rightarrow$: Eşleme işareti.

$\leftrightarrow$: Birc - bir eşleme işareti.

$\Rightarrow$: Gerektirme işareti.

$\Leftrightarrow$: Çift gerektirme işareti.

AB : AB doğrusu.

[AB] : AB doğru parçası.

[AB[: B ucu açık doğru parçası.

]AB : AB yarım doğrusu.

]AB] : A ucu açık doğru parçası.

| AB | : AB doğru parçasının uzunluğu.

// : Paralellik işareti.

$\perp$: Diklik işareti.

$\cong$: Eşlik işareti.

$\sim$: Benzerlik işareti.

[AX : Başlangıç noktası A olan AX ışını.

$\widehat{ABC}$: ABC açısı.

$s(\widehat{ABC})$: ABC açısının ölçümü.

$\widehat{A}$: A açısı.

$s(\widehat{A})$: A açısının ölçümü.

$\overset{\frown}{ABC}$: ABC üçgeni.

$\overset{\frown}{AB}$: AB yayı.

$s(\overset{\frown}{AB})$: AB yayının ölçümü.

$|\overset{\frown}{AB}|$: AB yayının uzunluğu.

BİRİNCİ BÖLÜM

REEL (GERÇEK) SAYILAR

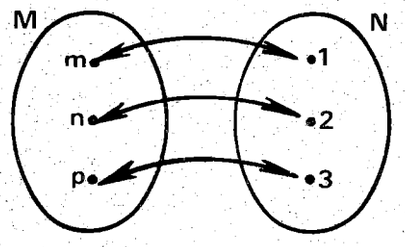
1-1. RASYONEL SAYILARIN YENİDEN GÖZDEN GEÇİRİLMESİ

1-1.1. Doğal Sayılar Kümesi

Sayılar, doğadaki eşya ve nesnelerle daima başbaşa olan insanları bu nesneleri saymak gereksinmesinden meydana gelmiştir. İlkel toplumlarda insanlar, sayı düşüncesini iki kümenin elemanlarını eşleyen yöntemiyle geliştirmişlerdir. Örneğin, avladığı hayvanların sayısını belirtmek isteyen bir avcı; barınağının yüzeylerine, vurduğu hayvan sayısı kadar resimler yapmış ya da ağaç dalları üzerine çentikler işaretlemiştir. Ayrıca, avda kaç tane hayvan vurduğunu anlatmak için de, sözünü ettiğimiz işaretleri gösterirdi. Avcı, bu işaretleri gösterirken; vurduğu hayvanlarla bu işaretler arasında bir "**bire - bir**" eşleme yaparak aslında "**kaç tane**" hayvan vurduğunu ifade ediyordu.

Böylece, sayı kavramlarında ilk gelişmenin "**denk (eş güçlü) küme**" kavramına dayandığını anlıyoruz.

"Ortaokul 1. sınıftan, eleman sayıları eşit olan $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{\Delta, \square, \bigstar, \oplus\}$ gibi kümelere, **denk (eş güçlü)** kümeler dediğimizi denk kümelerin eleman sayıları arasında bir bire-bir eşleme yapabildiğimizi ve $s(A) = s(B)$ olduğunu biliyorsunuz".



1. Şekil

$M = \{m, n, p\}$ ve $N = \{1, 2, 3\}$ kümelerini gözönüne alalım. $s(M) = s(N)$ olduğundan M ve N kümeleri denktirler. Gerçekten, 1. şekilde gördüğünüz gibi; M ve N kümelerinin elemanları arasında, bir bire-bir eşleme yapabiliriz.

M kümesi ile N kümesinden başka; Örneğin,

$P = \{a, b, c\}$ ve $R = \{e, f, g\}$ kümeleri de denktirler. Bunlar gibi, M kümesine denk olan sonsuz sayıda küme bulabiliriz.

O halde; M, N, P, R ile bunlara denk olan kümeleri bir sınıfta topladığımızı düşünelim.

— "Bu kümelerin ortak özeliği nedir?" Sorusunun cevabı :

— "Hepsinin de aynı sayıda elemanı vardır ve **3 tane**" olacaktır.

Buna göre, bu sınıftaki kümelerin "**üç**" lük ortak özeliği vardır.

Benzer biçimde, dört elemanı olan kümelerin "**dört**" lük ortak özeliği; bir elemanı olan kümelerin de "**bir**" lik **ortak** özeliği vardır. Böylece, denk kümelerden oluşan her kümeyi belirleyen bir sayı düşüncesi doğar.

Boş kümenin elemanı olmadığını biliyorsunuz. Bu nedenle boş kümeye denk olan bir küme boştur. Boş kümenin elemanı sayısına "**sıfır**" denir ve "**0**" işaretiyle gösterilir.

Örneğin, $A = \emptyset$ ve $S(A) = 0$ (sıfır) dır.

"Bir" lik ortak özeliği olan kümelerin tümü denktirler. Birlilerin eleman sayısına; "**bir**" denir ve "**1**" işaretiyle gösterilir.

Örneğin, $B = \{a\}$ ve $s.(B) = 1$ (bir) dir.

"İki" lik ortak özeliği olan kümelerin tümü denktirler. İkililerin eleman sayılarına "**iki**" denir ve "**2**" işaretiyle gösterilir.

Örneğin, $C = \{a, b\}$ ve $s(C) = 2$ (iki) dir.

"Üç" lük ortak özeliği olan kümelerin tümü denktirler. Üçlülerin eleman sayısına "**üç**" denir ve "**3**" işareti ile gösterilir.

Örneğin, $D = \{a, b, c\}$ ve $s(D) = 3$ (üç) tür.

Böylece, her kez kümelerin eleman sayılarını birer artırarak işlemi sürdürürsek :

0, 1, 2, 3, 4 5,... sayılarını elde ederiz. Bu sayılara doğal sayılar ve bu sayıların oluşturduğu kümeye de **doğal sayılar kümesi** denir. Doğal sayılar kümesi D ile gösterilir ve

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

biçiminde yazılır.

Boş olmayan kümelerin elemanlarını saymaya yarayan 1, 2, 3, 4, 5,... sayılarına (sıfır hariç doğal sayılar), **sayma sayıları** ve bu sayıların oluşturduğu;

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

kümesine de **sayma sayıları kümesi** denir.

1-1.2, Doğal Sayılar Kümesinde Toplama İşlemi

Doğal sayıları, elemanları sayılabilen kümelere dayandırarak tanımlamıştık. Bunların toplamını da, kümelere dayanarak inceleyelim.

1. Örnek : $M = \{a, b, c, d\}$ ve $N = \{e, f\}$ kümelerini ele alalım. $s(M) = 4$, $s(N) = 2$ dir. M ve N kümelerinde, toplam 6 eleman vardır. Buna göre,

$s(M) + s(N) = s(M \cup N)$ olduğunu sezgimizle anlıyoruz. Gerçekten, $M \cap N = \emptyset$ olduğundan, $M \cup N = \{a, b, c, d, e, f\}$ ve $s(M \cup N) = 6$ dır.

2. Örnek : $M = \{a, b, c, d\}$ ve $N = \{a, e, f\}$ kümeleri verilsin. $s(M) = 4$, $s(N) = 3$ ve $s(M) + s(N) = 7$ olduğu halde, $M \cap N \neq \emptyset$ olduğundan, $M \cup N = \{a, b, c, d, e, f\}$ olup, $s(M \cup N) = 6$ dır. Öyleyse,

$$s(M) + s(N) \neq s(M \cup N)$$

olduğunu görüyoruz. Bu iki örnekten yararlanarak doğal sayılarda toplama işlemi şöyle tanımlanır :

M ve N kümeleri verilsin. $M \cap N = \emptyset$. $s(M) = m$, $s(N) = n$ (m ve n doğal sayı) ise, $M \cup N$ kümesinin elemanı sayısına, m ve n doğal sayılarının toplamı denir. Bu toplam.

$$m + n = s(M \cup N)$$

olup; m ve n bu toplamın terimleridir.

3. Örnek : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ve $B = \{a, b, c, d, e)$ kümeleri için, $s(A) = 7$ ve $s(B) = 5$'tir. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c, d, e\}$ olup;

$$\begin{array}{ccccc} s(A) & + & s(B) & = & s(A \cup B) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 7 & + & 5 & = & 12 \end{array}$$

dir. Bu işlemde, 12 ye toplam; 7 ile 5 e de, toplamanın terimleri denir. $7 + 5 = 12$ işlemi, "**yedi artı beş, eşittir oniki**" biçiminde ifade edilir.

1–1.3. Toplamanın Özelikleri

a) Kapalılık Özeliği

$2 \in D$ ve $4 \in D$ için, $2 + 4 = 6 \in D$ ve

$6 \in D$ ve $8 \in D$ için, $6 + 14 \in D$ örneklerindeki gibi; doğal sayılar kümesi, toplama işlemine göre kapalıdır.

b) Değişme Özeliği

$5 \in D$ ve $7 \in D$ için,

$$\left.\begin{array}{l} 5 + 7 = 12 \\ 7 + 5 = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow 5 + 7 = 5 + 7$$

örneğindeki gibi; doğal sayılar kümesinde, toplama işleminin değişme özeliği vardır.

c) Birleşme Özeliği

$$\underbrace{(12 + 8)}_{20} + 5 = 12 + \underbrace{(8 + 5)}_{13} = \underbrace{(12 + 5)}_{17} + 8$$

$$20 + 5 = 12 + 13 = 17 + 8$$

$$25 = 25 = 25$$

olduğundan,

$$(12 + 8) + 5 = 12 + (8 + 5) = (12 + 5) + 8$$

yazılır. Doğal sayıların tüm elemanları alınarak bu tür işlemler yapılsa, doğal sayılar kümesinde, toplama işleminin birleşme özeliğinin olduğu görülür.

d) Etkisiz (birim) Eleman

$0 \in D$ ve $6 \in D$ için, $6 + 0 = 0 + 6 = 6$ olduğu açık değil mi? O halde 0 sayısı, doğal sayılar kümesinde, toplama işleminin etkisiz (**birim**) elemanıdır.

Genel olarak : Her $m, n, k \in D$ için;

1. $(m + n) \in D$ dir. (kapalılık özeliği).
2. $m + n = n + m$ dir. (değişme özeliği).
3. $(m + n) + k = (n + k) + n$ dir. (birleşme özeliği).
4. $m + 0 = 0 + m = m$ dir. (sıfırın etkisiz eleman olması).

ALIŞTIRMALAR

1. $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ve $B = \{a, b, c, d, d\}$ kümeleri veriliyor.

a) A ve B kümelerinin elemanlarının sayısı nedir?

b) $A \cup B$ kümesinin elemanlarının sayısı nedir?

c) $s(A) = s(B) = s(A \cup B)$ midir?

2. Aşağıdaki kümelerin, toplama işlemine göre kapalı olup olmadıklarını belirtiniz.

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
b) B = 5 ten büyük tüm doğal sayılar kümesi.
c) C = 4 ile 14 arasındaki doğal sayılar kümesi.
d) Ç = Çift doğal sayılar kümesi.
e) T = Tek doğal sayılar kümesi.
f) S = Sayma sayıları kümesi.
g) $D = \{0, 10, 20\ 30, 40, \ldots\}$
h) $E = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$
ı) $F = \{5, 10, 15, \ldots\}$
i) $G = \{0, 1\}$

3. Toplama işleminin değişme özeliğine göre, aşağıdaki eşitliklerde x ve y nin değerlerini bulunuz.

a) $8 + x = 25 + 8$ **b)** $17 = 13 + 17 + y$

4. Toplama işleminin birleşme özeliğine göre, aşağıdaki eşitliklerde x ve y nin değerlerini bulunuz.

a) $(5 + 18) + 12 = x + 30$ **b)** $(7 + 23) + 5 = y + 28$

c) $8 + (4 + x) = 4 + 15$ **d)** $9 + 28 = (y + 10) + 18$

Çözüm :

a) $(5 + 18) + 12 = x + 30$ eşitliğinin sol yanı, toplamanın birleşme özeliğine göre :

$(5 + 18) + 12 = 5 + (18 + 12)$ ya da

$(5 + 18) + 12 = 5 + \quad 30$ olarak yazılır.

Öte yandan,

$x + 30 = 5 + 30$ ve toplamada değişme özeliği kullanılarak $x = 5$ bulunur.

Diğer alıştırmaları benzer biçimde çözünüz.

5. Toplama işleminde değişme ve birleşme özeliklerinden yararlanarak, aşağıdaki toplamaları kısa yoldan yapınız.

a) $249 + 118 + 101 + 202 = ?$ **b)** $235 + 43 + 65 + 57 = ?$

6. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesi veriliyor.

$x \leqslant y$ bağıntısı $(x, y \in E)$ veriliyor. $x + y = 9$ eşitliğini gerçekleyen (x, y) ikililerini bulunuz.

1–1.4. Doğal Sayılar Kümesinde Çarpma İşlemi

$A = \{a, b\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$ kümelerini ele alalım.

$\{a, b\} \times \{1, 2, 3\} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$;

$A \times B$ çarpımının, $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere (a, b), ikilileri kümesi (sıralı ikililer kümesi) olduğunu biliyorsunuz.

— A, B ve $A \times B$ kümelerinin eleman sayıları nedir?

— $s(A) = 2$, $s(B) = 3$ ve $s(A \times B) = 6$ mıdır?

Burada, $s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$ ya da $6 = 2.3$ tür.

Öyleyse, $A \times B$ kümesinin eleman sayısına, A ve B kümelerinin eleman sayılarının **çarpımı**; çarpımı bulmak için yapılan işleme de, **çarpma işlemi** denir ve "$\times$" ya da "." işaretiyle gösterilir.

$2.3 = 6$ ifadesi "**iki çarpı üç**", **eşittir altı**" diye okunur ve 2 ile 3 e **çarpanlar**. 6 ya da **çarpım** denir.

$3 + 3 = 6$ ya da $2 + 2 = 2.3$ yazılış biçimleri için ne düşünürsünüz.

Öyleyse, $3 + 3 = 2.3$ ya da $2 + 2 + 2 = 2.3$ yazabilir miyiz?

Bunlar gibi :

$9 + 9 + 9 + 9 = 4.9 = 36$

$5.7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$ yazabilir miyiz?

Genel olarak : $m, n \in D$ ve $s(A) = m$, $s(B) = n$ olacak biçimde A ve B kümeleri seçilmiş ise;

$$\mathbf{m \cdot n = s(A \times B)\ dir.}$$

Bu tanım, $A \cap B \neq \emptyset$ olsa da doğrudur.

Çarpma İşleminin Özelikleri

a) Kapalılık Özeliği

$6 \in D$, $5 \in D$ ve $6.5 = 30 \in D$ örneğinde olduğu gibi, iki doğal sayının çarpımı, daima bir doğal sayı olup; doğal sayılar kümesi çarpma işlemine göre **kapalıdır.**

b) Değişme Özeliği

$5.8 = 8.5 = 40$ örneğindeki gibi doğal sayılar kümesinde çarpma işleminin **değişme özeliği** vardır.

c) Birleşme Özeliği

$$(4 \cdot 5) \cdot 7 = 4 \cdot (5.7) = 5 \cdot (4 \cdot 7)$$

$$20 \cdot 7 = 4 \cdot 35 = 5 \cdot 28$$

$$140 = 140 = 140$$

örneğindeki gibi, doğal sayılar kümesinde çarpma işleminin birleşme özeliği vardır.

d) Etkisiz (birim) Eleman

$6.1 = 1.6 = 6$ ve $13.1 = 1.13 = 13$ olduğundan, 1 sayısının çarpma işlemi üzerinde bir etkisi olmadığını görüyorsunuz. Bu nedenle, 1 sayısı, doğal sayılar kümesinde çarpma işleminin **etkisiz (birim)** elemanıdır.

e) Yutan Eleman

$7.0 = 0.7 = 0$ ve $5.0 = 0.5 = 0$ işlemlerinin sonuçları, sıfır ile bir sayının çarpılmasından elde edilen sonucun, daima 0 (sıfır) olduğunu anlatır mı? Öyleyse, 0 (sıfır) sayısına çarpma işleminin yutan elemanı denir.

f) Çarpma İşleminin Toplama İşlemi Üzerine Dağılma Özeliği

$$8.\ (7+3) = 8.7 + 8.3$$
$$8.\ \ 10 = 56 + 24$$
$$80 = 80$$

işleminde, eşitliğin iki yanındaki sonuçların aynı oluşu, bize çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliğinin varlığını gösterir.

Genel olarak : Her m, n, k ∈ D için;

1. (m . n) ∈ D dir. (Kapalılık özeliği).
2. m . n = n . m dir. (Değişme özeliği).
3. (m . n) . k = m . (n . k) = (m . k) . n dir. (Birleşme özeliği).
4. m . 1 = 1 . m = m dir. (1 in etkisiz eleman olması).
5. m . 0 = 0 . m = 0 dır. (0 ın yutan eleman olması).
6. m . (n + k) = m . n + m . k dir. (Dağılma özeliği).

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki eşitliklerde, x ve y nin değerini bulunuz.

a) x . 9 = 25 . y **b)** 18 . 5 = 5 . y

c) 14 . x = 8 . 14 **d)** 24 . x = 10 . y

Çözüm :

a) x . 9 = 25 . y eşitliğinde, çarpmada değişme özeliğine göre;

x = 25 ve y = 9 bulunur. x ve y için başka değerler bulabilir misiniz?

Diğer alıştırmaları benzer biçimde çözünüz.

2. Çarpmanın birleşme özeliğinden yararlanarak, aşağıdaki eşitliklerde x ve y nin değerlerini bulunuz.

a) (9 . 4) . 10 = x . 40 **b)** 6 . (15 . 4) = x . 4

c) (y . 21) . 2 = 18 . 42 **d)** 150 . 8 = 10 . (15 . y)

Çözüm :

a) (9 . 4) . 10 = x . 40 eşitliğinde, çarpmanın birleşme özeliğine göre;

(9 . 4) . 10 = 9 . (4 . 10)

(9 . 4) . 10 = 9 . 40 yazılır.

Oysa, (9 . 4) . 10 = x . 40 verilmişti.

Buradan, 9 . 40 = x . 40 ve x = 9 bulunur.

Diğer alıştırmaları benzer biçimde çözünüz.

3. Çarpmanın değişme ve birleşme özeliklerinden yararlanarak, aşağıdaki çarpma işlemlerini en kısa yoldan yapınız.

a) 9.15 . 7.4 = ? **b)** 93.5 . 11.14 = ?

c) 4.13 . 25.3 = ? **d)** 12.6 . 12.5 = ?

4. 28.4 . y . 33 = 0 olduğuna göre, y nin değerini bulunuz.

5. 4.5 . (x − 9) = 0 olduğuna göre, x in değerini bulunuz.

6. Aşağıdaki işlemleri, çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özeliğinden yararlanarak, en kısa yoldan yapınız.

a) 15 . (8 + 7) = ? **b)** (18 + 12) . 7 = ?

c) 6 . (14 + 36) = ? **d)** 6 . (17 + 22 − 13) = ?

e) (38 + 10 + 12) . 33 = ?

1. 1 . 5 . Çıkarma İşlemi

Doğal sayılar kümesinin iki elemanı, m ve n olsun. Bu sayılar kümesinde (m ; n) ikilisini genel olarak; x + n = m eşitliği ile gerçekleyen bir x sayısı varsa, bu x sayısına m ile n arasındaki fark denir ve x = m − n biçiminde yazılır. Öyleyse, çıkarma işlemi toplama işleminin tersidir.

Doğal sayılar kümesinde, x sayısının bulunabilmesi için, m ⩾ n olması gerekir.

Burada, m ye eksilen, n ye çıkan, x e de fark denir.

Genel olarak : Her m, n, k $\in$ D ve m $\geq$ n için :

$m - n = k$ eşitliği, $m = k + n$ dir.

Bu tanıma göre, çıkarma işleminin kontrolü :

Eksilen = Çıkan + Fark

olarak ifade edilir.

Örnekler :

1. m = 9, n = 6 için, x = 9 — 6 = 3 tür.

2. m = 6, n = 6 için, x = 6 — 6 = 0 dır.

3. m = 24, n = 18 için, x = 24 — 18 = 6 dır.

4. m = 18, n = 34 için, x = 18 — 34 ile belli bir doğal sayı yoktur. Bu nedenle, doğal sayılar kümesi çıkarma işlemine göre kapalı değildir.

5. 8 — 3 = 3 — 8 eşitliği yazılamadığından (8 — 3 $\neq$ 3 — 8) doğal sayılar kümesinde çıkarma işleminin **değişme özeliği** yoktur.

6.
$$25 - (18 - 5) = (25 - 18) - 5$$
$$25 - 13 = 7 - 5$$
$$12 \neq 2$$

Buna göre, doğal sayılar kümesinde çıkarma işleminin birleşme özeliği var mıdır? Yoktur

7.
$$8 . (9 - 4) = (8 . 9) - (8 . 4)$$
$$8 . 5 = 72 - 32$$
$$40 = 40$$

Bu işlemlerin sonuçları size, doğal sayılar kümesinde, çarpma işleminin çıkarma işlemi üzerine dağılma özeliğinin varlığını anlatır mı? Vardır

1 - 1 . 6 Bölme İşlemi

Doğal sayılar kümesinin, 21 ve 3 elemanmarını alalım. Bu kümede, (21 ; 3) ikilisini : 3 . x = 21 eşitliği ile gerçekleyen bir x doğal sayısı varsa, bu x sayısına, 21 in 3 e bölümü ve yapılan işleme de bölme adı verilir. Sözü edilen bu bölme işlemi, x = 21 : 3 biçiminde gösterilir.

3. x = 21 eşitliği, "3 ü, hangi x sayısı ile çarpmalıdır ki, çarpım 21 etsin" anlamındadır. Sözü edilen bu sayının 7 olacağı açıktır. Zihinden yaptığımız bu işlem, 21 sayısının 3 e bölünmesi işlemidir.

Gerçekten, 3 . 7 = 21 olduğunu biliyoruz.

Başka bir anlamda; bu 7 sayısı, 21 sayısının içinde, 3 sayısının 7 kez olduğunu anlatır.

Buradan; çarpma işlemi ile bölmenin, birbirlerinin ters işlemleri olduğu anlaşılır.

21 : 3 = 7 bölme işleminde; **21 bölünen 3 bölen ve 7 bölümdür.** Bu bölme işleminde kalanın 0 (sıfır) olduğuna dikkat ediniz. Örneğin, "35 : 4" işleminde, bölüm 8, kalan 3 ve 35 = (4 . 8) + 3 = 32 + 3 = 35 tir. Buna göre, bölme işleminin kontrolü;

Bölünen = Bölen $\times$ Bölüm + Kalan

olarak ifade edilir.

Genel olarak : Her m, n, p, k $\in$ D ve n $\neq$ 0 için; m, bölünen; n, bölen; p, bölüm ve k, kalan ise, m = (n . p) + k dir.

Bölme İşleminin Özelikleri

a) Kapalılık Özeliği

29 = 5 . m eşitliğini gerçekleyen bir m doğal sayısı yoktur. Yani, 29 doğal sayısı, 5 doğal sayısına tam olarak bölünmez. (29 : 5 = ? işleminde, bölüm 5, kalan 4 tür). Bu nedenle, doğal sayılar kümesi bölme işlemine göre kapalı değildir.

b) Değişme Özeliği

16 : 4 $\neq$ 4 : 16 dır. Çünkü; bu eşitliğin sol yanı 4 e eşit olduğu halde, sağ yanı (4 : 16) $\neq$ 4 tür. Bu nedenle, doğal sayılar kümesinde bölme işleminin değişmez özeliği yoktur.

e) Birleşme Özeliği

$$(64 : 8) : 2 = 64 : (8 : 2)$$
$$8 : 2 = 64 : 4$$
$$4 \neq 16$$

olduğundan, bölme işleminin **birleşme özeliği** yoktur.

d) 1 ve 0 (sıfır) Sayılarının Özelikleri

$7 : 7 = 1$ olduğunu biliyorsunuz öyleyse, her doğal sayının kendisine bölümü, 1 e eşittir (sıfır hariç).

6. $1 = 6$ ise, $6 : 1 = 6$ eşitliklerinin her ikisi de doğrudur. Bu ise, herhangi bir doğal sayının 1 e bölündüğünde, kendisine eşit bir sayının elde edileceğini anlatır.

Genel olarak : Her $m \in D$ ve $m \neq 0$ için; $m : m = 1$ ve $m : 1 = m$ dir.

$0 : 5 = m$ ise, $0 = m \cdot 5$ tir. (bölmenin tanımı). Bu eşitliği gerçekleyen m doğal sayısının, 0 (sıfır) olması gerektiğini biliyorsunuz. Çünkü; $0 = 0 \cdot 5 = 0$ dır. Öyleyse, $0 : 5 = 0$ olur. Buna göre, sıfırın, sıfırdan farklı her doğal sayıyla bölümü sıfırdır.

Genel olarak : Her $m \in D$ ve $m \neq 0$ ise $0 : m = 0$ dır.

$5 : 0$ işleminde, bölümün n gibi bir doğal sayı olduğunu varsayalım. O zaman, $5 : 0 = n$ ise, $5 = n \cdot 0$ olur. $0 \cdot n = 0$ olduğundan; $5 = n \cdot 0$ ise, $5 = 0$ olması gerekir ki, bu da varsayıma aykırıdır. Yani, $5 = 0$ olamaz. O halde $5 : 0$ bölme işleminden söz edilemez. Kısaca, bir sayının sıfıra bölümü anlamsızdır. Ayrıca, $0 : 0$ da anlamsızdır.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki eşitliklerde, m ve n yerine yazılması gereken doğal sayıları bulunuz.

a) $13 - m = 8$ **b)** $m - 7 = 25$ **c)** $m = 63 - 38$

d) $n - 0 = 33$ **e)** $n - 273 = 127$ **f)** $n - 12 = 0$

2. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $15.(27 - 12) = ?$ **b)** $(45 - 20).6 = ?$ **c)** $5.(423 - 123 = ?$

3. Aşağıdaki eşitliklerde, m ve n yerine yazılması gereken doğal sayıları bulunuz.

Uyarı : Önce parantez içindekileri yapınız.

a) $m \cdot 4 = 48$ **b)** $15 \cdot n\ 60$ **c)** $n = 84 : 6$

d) $88 : m = 8$ **e)** $m \cdot (3 \cdot 5) = 90$ **f)** $6 \cdot (n \cdot 4) = 480$

g) $m : 7 = 0$ **h)** $7 : m = 7$ **i)** $n : 15 = 1$

4. Aşağıda verilen bölme işlemlerinin, sonuçlarını bulunuz.

a) $(64 : 4) : 2 = ?$ **b)** $90 : (15 : 3) = ?$

5. Şu bölme işlemini yapınız. $80 : 4 : 2 = ?$ bu yazılış biçimi bir anlam taşıyor mu? Bu işlemin sonucu 10 olacak biçimde parantezi yerleştiriniz.

6. Bir bölme işleminde, bölen 74, bölüm 5 ve kalan 3 tür. Bölüneni bulunuz.

7. Aşağıdaki bölme işlemlerini yapınız.

a) $6464 : 16 = ?$ **b)** $730 : 20 = ?$ **c)** $2781 : 9 = ?$

d) $13575 : 25 = ?$ **e)** $11845 : 35 = ?$ **f)** $4426 : 11 = ?$

1 - 1 . 7 . Tamsayılar Kümesi

$M = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ ve $N = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ kümeleri verilsin. Birinci terimi M den, ikinci terimi N den alarak oluşturulan ikililerden herbirine **sıralı ikili** denir. Bu sıralı ikililerden bazılarını, aşağıdaki çizelgede dikdörtgenler içine yazılmış olarak görüyorsunuz. Boş bırakılan yerlere de, yazılması gereken sıralı ikilileri siz yazınız.

N								
4	(0;4)	(1;4)	(2;4)	(3;4)	(4;4)	(5;4)	(6;4)	(7;4)
3	(0;3)	(1;3)		(3;3)		(5;3)		(7;3)
2	(0;2)		(2;2)		(4;2)	(5;2)		(7;2)
1	(0;1)	(1;1)	(2;1)				(6;1)	(7;1)
0	(0;0)	(1;0)	(2;0)	(3;0)	(4;0)	(5;0)	(6;0)	(7;0)
	0	1	2	3	4	5	6	7
					M			

Yukarıdaki çizelgede gördüğünüz sıralı ikilileri, üç grupta inceleyiniz.

1. (1;0), (2;1), (4;2), (5;2), (6;4), (7;3),... gibi birinci terimleri, ikinci terimlerden büyük olan sıralı ikililer.

Uyarma : Geçen yıldan; terimleri arasındaki fark, birbirine eşit olan tüm sıralı ikililerin denk ikililer olduğunu ve bu ikililerin en sade olanına, bu denk ikililerin **belirticisi** denildiğini biliyorsunuz.

Buna göre, (5;2) ve (7;4) ikilileri, denk ikililer midir?

Açıklama : $5-2=3$; $7-4=3$ olduğuna dikkat ediniz. Bu denk ikililer için, bir de şöyle düşününüz : İkililerin birinci terimleri kazancı, ikinci terimleri masrafı göstersin.

Süha, bir günde 78 lira kazansa, 75 lira harcasa; Başka bir gün 63 lira kazansa 60 lira harcasa; ya da 3 lira kazansa da hiç harcamasaydı, 3 lira parası olmaz mıydı?

Sözünü ettiğimiz ikililerin, terimleri arasındaki farklar birbirine eşit midir?

$$78-75=3\ ;\ 63-60=3 \text{ ve } 3-0=3 \text{ tür.}$$

Öyleyse, bu sıralı ikililer denktir. Bu nedenle, bu denklik :

$$(78;75)\equiv(63;60)\equiv(6;3)\equiv(5;2)\equiv\ldots\equiv(3;0)$$

biçiminde gösterilir. ("$\equiv$" denklik işareti).

Bu ikililerin en sadesi, (3; 0) ikilisidir. (3; 0) ikilisi, bu denk ikililer kümesinin belirticisidir.

Matematikte : $(3;0)=+3=3$ biçiminde gösterilir ve **"pozitif (artı) üç"** diye okunur.

Bunun gibi,

$(1;0)=1$, $(3;0)=3$, $(4;0)=4$, $(5;0)=5$, $(6;0)=6$, $(7;0)=7$

pozitif tamsayılarına karşılık gelirler.

Tanım : Genel olarak; m $\in$ S olmak üzere. (m;0) biçiminde temsil edilebilen denklik sınıflarından her birine pozitif tam sayılar denir ve (m;0) = + m = m biçiminden biri ile yazılır. Bu tür sayıların oluşturduğu küme : T^+ ile gösterilir ve $T^+=\{1, 2, 3, 4,\ldots\}$ biçiminde yazılır. Bu kümeye, pozitif tamsayılar kümesi denir.

II. (0;1), (0;3), (1;3), (1;4), (2;4), (3;4), (4;5) gibi; birinci terimleri, ikinci terimlerden küçük olan sıralı ikililer. Bu ikililerden (1;3)

ve (2;4) ikilileri birbirlerine denk midir? Bu denk ikililerin belirticisi, $(2;4)\equiv(0;\ 4-2)\equiv(0;2)$ dir.

Matematikte : (0;2) = — 2 biçiminde yazılır ve **"negatif (eksi) iki"** diye okunur. Bunun gibi, (0;1) = — 1, (0;3) = — 3, (0;4) = — 4, (0;5) = — 5, (0;6) = — 6, (0;7) = — 7 negatif tam sayılarına karşılık gelirler.

Tanım : Genel olarak, n $\in$ S olmak üzere. (0;n) biçiminde temsil edilebilen denklik sınıflarından her birine negatif tamsayılar denir ve (0;n) = — n biçiminde yazılır. Bunların oluşturduğu küme : T^- ile gösterilir ve $T^-=\{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$ biçiminde yazılır. Bu kümeye, negatif tamsayılar kümesi adı verilir.

III. Birinci terimi, ikinci terimine eşit olan ikililerdir. Bunlar : Bunlara denk olan birçok ikili yazabiliriz. Bu denk ikililerin belirticisi, (0;0) ikilisidir.

Matematikte : (0;0) = 0 biçiminde yazılır ve **(sıfır)** diye okunur. Sıfır tamsayısının pozitif ya da negatif bir işareti yoktur.

Sonuç : (M;0) = + m, (0;n) = — n ve (0;0)=0 ile tanımladığımız sayılara tam sayılar adı verilir. Bunların oluşturduğu kümelerin birleşimine tamsayılar kümesi denir ve bu küme T harfi ile gösterilir.

$T=\{\ldots, -4, -3, -2, -1\}\cup\{0\}\cup\{+1, +2, +3, +4,\ldots\}$
ya da kısaca : $T=\{T^-\}\cup\{0\}\cup\{T^+\}$ biçiminde gösterilir ve

$$T=\{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,\ldots\}$$

olarak yazılır.

1 - 1 . 8 Tamsayılar Kümesinde Toplama İşlemi

1. Örnek :

(9 ; 3) + (14 ; 6) toplamını yapalım.

I. Yol : $(9;0)\equiv(6;0)=6$ ve $(14;6)\equiv(8;0)=8$ dir. Buradan $6+8=14$ olur.

II. Yol : Toplamanın ikililerle yapılan tanımına göre;

$$(9;3)+(14;6)\equiv(9+14;\ 3+6)\equiv(23;9)\equiv(14;0)=14 \text{ tür.}$$

Her iki yol ile bulunan sonuçların, aynı olduğunu görüyorsunuz.

Bu nedenle, doğal sayı ikililerinin toplamını bulmak için, bu iki yoldan birini seçmek yeterlidir.

2. Örnek :

$(9;4) + (13;28) \equiv (9 + 13;\ 4 + 28) \equiv (22;32) \equiv (0;10) = -10$ dur ya da $(9;4) \equiv (5;0) = 5$ ve $(13;28) \equiv ()15) = -15$ tir. Buradan,

$$5 + (-15) = -10 \text{ bulunur.}$$

3. Örnek :

$(4;12) + (7;16) = ?$

$(4;12) \equiv (0;\ 8) = -8$ ve $(7;16) \equiv (0;9) = -9$ dur.

Buradan, $-8 + (-9) = -17$ olur.

4. Örnek :

$(6;6) + (4;4) \equiv (6 + 4;\ 6 + 4) \equiv (10;10) = (0;0) = 0$ dır.

1–1.9. Toplama İşleminin Özelikleri

a) Kapalılık Özeliği

Örnekler :

1. $6 \in T$, $9 \in T$ ve $6 + 9 = 15 \in T$ dir.
2. $-8 \in T$, $5 \in T$ ve $-8 + 5 = -3 \in T$ dir.
3. $18 \in T$, $24 \in T$ ve $18 + 24 = 42 \in T$ dir.
4. $-7 \in T$, $7 \in T$ ve $-7 + 7 = 0 \in T$ dir.

Sonuç : İki tamsayının toplamı, her zaman yine bir tamsayıdır.

Bu nedenle, tamsayılar kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

b) Değişme Özeliği

Örnek :

$$\left.\begin{array}{l} -15 + 6 = -9 \\ 6 + (-15) = -9 \end{array}\right\} \text{ ise, } -15 + 6 = 6 + (-15)$$

yazılabilir mi? Yazılabilirse, tamsayılar kümesinde toplama işleminin değişme özeliği vardır diyebilir miyiz?

c) Birleşme Özeliği

Örnek :

$$\underbrace{(27 + -24)}_{3} + 8 = 27 + \underbrace{(-24 + 8)}_{(-16)}$$

$$3 + 8 = 27 + (-16)$$

$$11 = 11$$

olduğuna göre, tamsayılar kümesinde, toplama işleminin birleşme özeliği vardır diyebilir miyiz?

d) Etkisiz (birim) Eleman

Örnekler :

$$7 + 0 = 0 + 7 = 7 \text{ ve } -15 + 0 = 0 + (-15) = -15$$

sonuçları; tamsayılar kümesinde, toplama işleminin etkisiz elemanının, 0 (sıfır) sayısı olduğunu anlatır mı?

e) Toplamaya Göre Ters Eleman

Örnekler :

$$+9 + (-9) = 0 \text{ ve } -25 + 25 = 0$$

işlemleri, 9 ile -9 un toplamaya göre birbirinin tersi;

-25 ile 25 in toplamaya göre birbirinin tersi olduklarını anlatır mı?

Sonuç : Tamsayılar kümesinde, toplama işlemine göre, her tamsayının bir tersi vardır. Genel olarak; tamsayı a ise, tersi –a dır. Sıfırın tersi ise kendisidir.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki eşitliklerde. noktalarla gösterilen yerlere, uygun olan en sade ikilileri ve sayıları yazdıktan sonra toplamaları yapınız.

a) $(29;0) + (0;14) = (\ldots) + -14 = ?$

b) $(0;18) + (\ldots) = -18 + -15 = ?$

c) $(26;39) + (8;15) = -13 + (\ldots) = ?$

d) $(8;3) + (15;20) = (\ldots) + -5 = ?$

2. Toplama işleminin birleşme özeliğinden yararlanarak, aşağıdaki eşitliklerde noktalarla gösterilen yerlere, yazılması gereken sayıları yazınız ve toplama işlemlerini yapınız.

a) $35 + (-78 + 13) = (\ldots) + 13 = ?$

b) $(-24 + 33) + (-9) = -24 + (\ldots) = ?$

3. $M = \{-11, -9, -7, -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ kümesi veriliyor. Bu kümenin, elemanlarının toplama işlemine göre terslerinden bir N kümesi bulunuz.

4. $A = \{-10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ kümesi veriliyor. Bu kümenin toplama işlemine göre, terslerinden bir B kümesi yazınız.

1-1.10. Tamsayılar Kümesinde Çıkarma İşlemi

Tamsayılar kümesinin iki elemanı, m ve n olsun. Bu kümede, (m, n) ikilisini $x + n = m$ eşitliği ile gerçekleyen bir x tamsayısı varsa, bu x sayısına; m ile n arasındaki fark denir ve $x = m - n$ ile gösterilir.

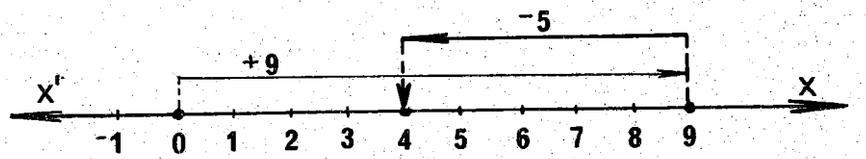
1. Örnek : $m = 9$ ve $n = 5$ olsun.

I. Yol : $x = 9 - 5 = 4$ olur.

II. Yol : $9 - 5 = x$ eşitliğinde, çıkarılan 5 sayısının toplamaya göre tersi olan -5 sayısını 9 a katalım.

$9 + (-5) = 4$ olur. Bulduğumuz sonucun, birinci yoldan elde edilen sonuçla aynı olduğunu görüyorsunuz.

III. Yol : $9 - 5 = x$ işlemini bir de, sayı doğrusu üzerinde gösterelim:



2. Şekil

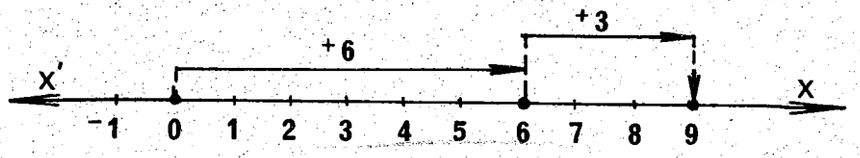
2. Şekil, $9 - 5$ çıkarma işlemi $9 + (-5)$ toplama işlemine dönüştürüldükten sonra; sayı doğrusundan yapılan toplamayı göstermektedir.

2. Örnek :

$6 - (-3) = x$ işlemini, aynı düşünüş yöntemiyle yapalım :

$6 - (-3) = x$ eşitliğinde çıkarılan, -3 sayısının toplamaya göre tersi olan $+3$ ü, 6 ya eklersek;

$6 + (+3) = 9$ olur. 3. Şekil, bu toplamayı sayı doğrusu üzerinde göstermektedir.



3. Şekil

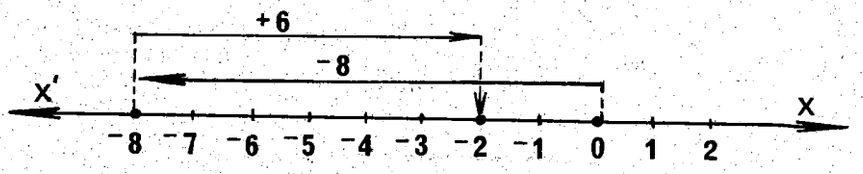
3. Örnek :

$-8 - (-6) = x$ çıkarma işlemini de aynı düşünüş yöntemiyle yapalım :

$-8 - (-6) = x$ eşitliğinde, çıkarılan -6 nın toplamaya göre tersi olan $+6$ sayısını, -8 e eklersek;

$-8 + 6 = -2$ elde edilir.

4. Şekil, bu toplamayı sayı doğrusu üzerinde göstermektedir.



4. Şekil

Sonuç : İki sayının farkını bulmak için, eksilen sayıya, çıkarılan sayının toplama işlemine göre tersi olan sayı eklenir.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki çıkarma işlemlerini yapınız.

a) $13 - (-9) = ?$ b) $-25 - (-32) = ?$ c) $6 - 14 = ?$

d) $38 - (6 - 8 + 5 - 14) = ?$ e) $26 - (-4 + 23 - 6 + 15) = ?$

2. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan x sayılarını bulunuz.

a) $x - 4 = 5$ b) $x + 7 = 11$ c) $x - 6 = -16$

d) $-5 + x = 17$ e) $8 + x = 18$ f) $13 - x = 9$

1–1.11. Tamsayılarda Çarpma İşlemi

Tanım : Genel olarak, her a, b, c, d ∈ D için; doğal sayı ikililerinin çarpma işlemi :

$$(a , b) . (c , d) = (a . c + b . d ; a . d + b . c)$$

dir.

1. Örnek :

$$\begin{aligned}(9;4) . (8;2) &= (9.8 + 4 . 2; 9 . 2 + 4.8)\\ &= (72 + 8;\ 18 + 32)\\ &= (80;\ 50) \equiv (30;0) = 30 \text{ dur.}\end{aligned}$$

Diğer yandan;

$$(9;4) \equiv (5;0) = 5 \text{ ve } (8;2) \equiv (6;0) = 6 \text{ dır.}$$

Bunlara göre,

$$5 . 6 = 30 \text{ yazılır.}$$

2. Örnek :

$$\begin{aligned}(7;2) . (5;8) &= (7.5 + 2.8 ; 7.8 + 2.5)\\ &= (35 + 16 ; 56 + 10)\\ &= (51 ; 66) \equiv (0;15) = -15 \text{ dir.}\end{aligned}$$

Öte yandan;

$$(7;2) \equiv (5;0) = 5 \text{ ve } (5;8) \equiv (0;3) = -5 \text{ tür.}$$

Buradan,

$$+ 5.(-3) = -15 \text{ yazılıdır.}$$

3. Örnek :

$$\begin{aligned}(4;9) . (2;6) &= (4.2 + 9.6;\ 4.6 + 9.2)\\ &= (8 + 54 ; 24 + 18)\\ &= (62;\ 42) \equiv (20;0) = 20 \text{ dir.}\end{aligned}$$

Diğer yandan;

$$(4;9) \equiv (0;5) = -5 \text{ ve } (2;6) \equiv (0;4) = -4 \text{ tür.}$$

Bunlara göre,

$$-5.(-4) = 20 \text{ yazılır.}$$

Sonuçlar :

I. Pozitif işaretli iki sayının çarpımı, pozitif bir sayıdır.

II. Ters işaretli iki sayının çarpımı, negatif bir sayıdır.

III. Negatif işaretli iki sayının çarpımı, pozitif bir sayıdır.

1–1.12. Çarpma İşleminin Özelikleri

a) Kapalılık Özeliği vardır.

$-6 . 7 = -42 \in T$, $-12 . -12 = 144 \in T$ ve $7 . 0 = 0 \in T$

sonuçları, tamsayılar kümesinin, çarpma işlemine göre kapalı olduğunu anlatır mı?

b) Değişme Özeliği vardır.

$\left.\begin{aligned}-9 . 6 &= -54\\ 6 . (-9) &= -54\end{aligned}\right\}$ ise, $-9.6 = 6.(-9)$ yazabiliriz.

Eşitliği, çarpma işleminin değişme özeliğinin varlığını anlatır mı?

c) Birleşme Özeliği vardır.

$$\begin{aligned}(-8.5) . (-3) &= -8 . (5 . -3)\\ -40 . (-3) &= -8 . (-15)\\ 120 &= 120\end{aligned}$$

sonuçları, çarpma işleminin birleşme özeliğinin varlığını anlatır mı?

d) Çarpma İşleminin, Toplama İşlemi Üzerine Dağılma Özeliği

$$6 \cdot (8 + 3) = 6 \cdot 8 + 6 \cdot 3$$
$$6 \cdot \quad 11 \quad = \quad 48 \quad + \quad 18$$
$$\quad\quad 66 \quad = \quad 66$$

Eşitliği, çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliğinin varlığını anlatır mı?

e) Çarpma işleminin, Çıkarma İşlemi Üzerine Dağılma Özeliği

$$5 \cdot (18 - 8) = 5 \cdot 18 - 5 \cdot 8$$
$$5 \cdot \quad 10 \quad = \quad 90 \quad - \quad 40$$
$$\quad\quad 50 \quad = \quad 50$$

Eşitliği, çarpma işleminin, çıkarma işlemi üzerine dağılma özeliğinin varlığını anlatır mı?

f) Etkisiz (birim) Eleman

$$7 \cdot 1 = 1 \cdot 7 = 7 \text{ dir.}$$

Eşitliği "1" sayısının, çarpma işleminin etkisiz (birim) elemanı olduğunu anlatır mı?

g) Yutan Eleman

$-8 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 12 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$ örneklerinde olduğu gibi, her tamsayının 0 (sıfır) ile çarpımı sıfır olup, 0 (sıfır) sayısı, tamsayılar kümesinde çarpma işleminin yutan elemanıdır.

h) Ters Eleman

1. $1 = 1 \Rightarrow$ 1 in çarpma işlemine göre tersi, kendisi;

-1. $-1 = 1 \Rightarrow -1$ in çarpma işlemine göre tersi, kendisidir.

("$\Rightarrow$" gerektirme işaretidir ve "ise" anlamında kullanılır. "x bir çift sayı ise, x^2 çift sayıdır". birleşik önermesi :

"x bir çift sayıdır $\Rightarrow$ x^2 çift sayıdır"

biçiminde gösterilir).

$0 \cdot x = 1$, $5 \cdot x = 1$ ve $-3 \cdot x = 1$ eşitliklerini gerçekleyen hiçbir x tamsayısı olmadığından; tamsayılar kümesinde, çarpma işlemine göre 1 ve ve -1 sayılarından başka hiçbir elemanın tersi yoktur.

1–1.13. Tamsayılar Kümesinde Sadeleştirme İşlemi

Genel olarak, her $a, b, c \in T$ için :

1. $a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$ (Toplamada kısaltma).

11. $a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b$ $(c \neq 0)$ (Çarpmada kısaltma) olur.

("$\Leftrightarrow$" çift gerektirme işareti denir. Bu işaretin solundaki bağıntı varsa, sağındaki bağıntı da vardır. Başka bir deyişle, taraflardan birinin varlığının, öbür tarafın varlığını gerektirdiğini anlatır).

Örnekler :

1. $a + 6 = a + b \Leftrightarrow 6 = b$ dir.
2. $a + b = -5 + b \Leftrightarrow a = -5$ tir.
3. $a \neq 0$ ve $8.a = b \cdot a \Leftrightarrow 8 = b$ dir.
4. $-9 \cdot a = -9 \cdot 4 \Leftrightarrow a = 4$ tür.

1–1.14. Tamsayılarda Kuvvet (Güç) Kavramı

$2.2 = 2^2$ ile gösterip, "2 nin karesi"

$2.2.2 = 2^3$ biçiminde gösterip, "2 nin küpü" diye okuduğumuzu biliyorsunuz. Bunlar gibi;

$2.2.2.2 = 2^4$ "2 nin dördüncü kuvveti (gücü)" diye okunur.

Genel olarak, $(a \neq 0)$ her $a \in T$ için :

1. $a^0 = 1$
2. $a^1 = a$
3. Her $a, n \in T$ ve $n \neq 0,1$ için;

$$a^n = \underbrace{a.a.a...a}_{n}$$ olarak tanımlanır. a^n ye, a nın n ninci kuvveti (gücü) denir ve "**a üssü n**" diye okunur. a^n ifadesinde, a ya taban n ye de **üs** denir.

Uygulamar.

1. $7^2 = 7.7 = 49$
2. $4^2 = 4.4 = 16$
3. $4^3 = 4.4.4 = (4.4) \,.\, 4 = 16.4 = 64$
4. $(-3)^2 = (-3) \,.\, (-3) = +9$
5. $(-3)^3 = (-3).(-3).(-3) = (-3).-3).-3 = +9.(-3) = -27$ dir.
6. $(-1)^4 = 1$ ve $(-1)^{10} = 1$ dir. Niçin?
7. $(-1)^1 = -1$ ve $(-1)^{11} = -1$ dir. Niçin?

ALIŞTIRMALAR

1) Aşağıdaki doğal sayı ikililerini çarpınız ve sonuçlarını tamsayı olarak bulunuz.

a) (9 ;5) . (17;7) = ? b) (6;13) . (2;6) = ?

c) (15;4) . (7;12) = ? d) (3;8) . (18;5) = ?

2) Aşağıdaki kümelerin çarpma işlemine göre kapalı olup olmadıklarını araştırınız.

a) $\{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ b) $\{-1, 0, 1\}$

c) $\{\ldots, -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5, \ldots\}$ d) $\{0,1\}$

e) $\{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$ f) $\{5, 10, 15\}$

3) Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) 8. (17—5) = ? b) —6. (12—8) = ?

c) —12. (6—9) = ? d) (25—33) . 5 = ?

e) 15. (—11 + 6) = ? f) (3—13) . (—8) = ?

4) Aşağıdaki tam sayıların kuvvetlerini bulunuz.

a) $2^1 = ?$ b) $(-2)^2 = ?$ c) $(-2)^3 = ?$

d) $(-2)^4 = ?$ e) $5^4 = ?$ f) $(-5)^4 = ?$

g) $7^3 = ?$ h) $13^2 = ?$ i) $(-15)^2 = ?$

1–1.15. Rasyonel Sayılar Kümesi

Tamsayılar kümesinin toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerine göre kapalı olduğunu görmüştük. Ama, bu küme bölme işlemine göre kapalı değildir. Gerçekten 12 nin 3 e bölümü bir tamsayı olduğu halde, 3 ün 12 ye bölümü bir tamsayı değildir. Çünkü $12x = 3$ eşitliğini gerçekleyen bir x tamsayısı bulunamaz.

Bu eşitlikte, $x = 3 : 12$ (Çarpmanın tersi bölme)

$$x = \frac{1}{4} \quad \text{bulunur.}$$

Bu denklemin çözüm kümesi olan $\frac{1}{4}$ sayısı, doğal ya da tamsayılar kümesinin elemanı değildir.

İşte, $12x = 3$, $4x = -9$, $-6x = -23$ ve $-7x = 15$ gibi eşitlikleri gerçekleyen x sayılarına **rasyonel sayılar** diyeceğiz.

Genel olarak; $m, n \in T$ ve $n \neq 0$ olmak üzere, $(m : n)$ ikililerinden oluşan kümeye **Rasyonel Sayılar kümesi** denir ve "**R**" ile gösterilir.

Bu tanıma göre; $(3 : 5)$, $(5 : -8)$, $(-6 : -4)$, $(-7 : 13)$ ve $(1 : 3)$ ikilileri **R** nin elemanlarıdır. $(0 : 1)$, $(0 : -3)$, $(0 : 7)$ ikilileri R nin elemanları olduğu halde; $(1 : 0)$, $(-3 : 0)$ ve $(0 : 0)$ ikilileri R nin elemanları değildir.

R nin her elemanına **kesir** denir. $(m : n)$ kesrinde m ye kesrin **payı** n ye de, kesrin **paydası** denir.

$(m : n)$ yerine $\frac{m}{n}$, $n \in T^+$ için, $\frac{m}{-n}$ yerine de, $\frac{m}{n}$ veya $-\frac{m}{n}$ yazacağız.

Örneğin, $(2 : 3)$ yerine $\frac{2}{3}$, $(1 : -2)$ yerine de; $-\frac{1}{2}$ yazacağız.

Not : Herhangi bir $(m : n)$ kesir ikilisine denk olan birçok ikili yazılabileceği, Lise 1. sınıfta ispatlanacaktır.

Örneğin, $(2 : 5)$ ikilisine denk olan

$(2 : 5), (4 : 10), (6 : 15), (8 : 20), \ldots, (2x : 5x), \ldots$ $(x \in T$ ve $x \neq 0)$

ikilileri aynı denklik sınıflarına ait olup; aynı rasyonel sayıyı gösterirler.

Bu denk kesirleri :

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{16} = \frac{8}{20} = \cdots = \frac{2x}{5x} = \ldots \ (x \neq 0)$$

biçiminde yazabiliriz.

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{8}{20} \text{ eşitlikleri;}$$

bir rasyonel sayının, pay ve paydası; 0 (sıfır) hariç, bir sayı ile çarpılır ya da bölünürse, bu rasyonel sayının değerinin değişmediğini anlarız. "Bu eşitliklerin en sağındaki ifadeye en soldakinin genişletilmişi, en solundakine de en sağdakinin sadeleştirilmişi denir".

$\frac{5}{1}$ kesri ve bu kesre denk olan $\frac{10}{2}, \frac{-15}{-4}, \frac{20}{4}, \ldots$ kesirleri; 5 tam sayısına eşittir.

$\frac{0}{1}$ ve bu kesre denk olan $\frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \frac{0}{4}, \ldots$ kesirleri, 0 (sıfır) a eşittir. Bunlara göre;

Sonuç : Her tamsayı, bir rasyonel sayı olarak gösterilebilir. Bu nedenle, $D \subset T \subset R$ olduğunu ifade edebiliriz.

1–1.16. Rasyonel Sayılar Kümesinde Toplama İşlemi

1. Örnek :

$$\frac{9}{8} + \frac{-5}{8} = \frac{9+(-5)}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

2. Örnek :

$$\frac{5}{7} + \frac{3}{4} = \frac{20}{28} + \frac{21}{28} = \frac{20+21}{28} = \frac{41}{28}$$

3. Örnek :

$$\frac{4}{5} + \frac{-3}{4} = \frac{16}{20} \neg \frac{-15}{20} = \frac{16+(-15)}{20} = \frac{1}{20}$$

Tanım : Genel olarak $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \in R$ için;

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \text{ dir.}$$

1–1.17. Toplamanın Özelikleri

Rasyonel sayılar kümesinde, toplama işleminin aşağıdaki özelikleri vardır.

1. Rasyonel sayılar kümesi, toplama işlemine göre **kapalıdır.**

2. Rasyonel sayılar kümesinde, toplama işleminin **değişme özeliği** vardır.

3. Rasyonel sayılar kümesinde, toplama işleminin **birleşme özeliği** vardır.

4. "0" sayısı, toplama işlemine göre **etkisiz (birim)** elemanıdır.

5. Her elemanın, toplama işlemine göre **tersi** olan bir eleman vardır.

Uygulamalar :

1. $\frac{7}{9} + \frac{2}{3} = \frac{7+6}{9} = + \frac{13}{9} \in R$ dir.

2. $\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{7}{8} + \frac{5}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

3. $\left(\frac{2}{7} + \frac{4}{7}\right) + \frac{5}{7} = \frac{2}{7} + \left(\frac{4}{7} + \frac{5}{7}\right)$

$$\frac{6}{7} + \frac{5}{7} = \frac{2}{7} + \frac{9}{7}$$

$$\frac{11}{7} = \frac{11}{7} \text{ dir.}$$

4. $\frac{3}{5} + \frac{0}{5} = \frac{0}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3+0}{5} = \frac{3}{5}$ tir.

5. $\frac{3}{5} + \frac{-3}{5} = \frac{3+(-3)}{5} = \frac{0}{5} = 0$ dır.

O halde $\frac{3}{5}$ ile $\frac{-3}{5}$ toplama işlemine göre birbirinin tersidir.

Bunun gibi; R de toplama işlemine göre :

$\frac{2}{3}$ ile $-\frac{2}{3}$; $\frac{7}{5}$ ile $-\frac{7}{5}$: $-\frac{9}{13}$ ile $\frac{9}{13}$ ters elemanlardır.

1–1,18. Çıkarma İşlemi

$\frac{2}{7}, \frac{6}{7} \in R$ için $\frac{2}{7} + x = \frac{6}{7}$ eşitliği ile belli olan,

$$x = \frac{6}{7} + \frac{-2}{7} = \frac{4}{7} \in R$$

sayısına : $\frac{6}{7}$ ile $\frac{2}{7}$ rasyonel sayıları arasındaki **fark** denir. Buna göre, $\frac{6}{7}$ den, $\frac{2}{7}$ yi çıkarmak demek : $\frac{6}{7}$ ye $\frac{2}{7}$ nin toplamaya göre tersi olan $\frac{-2}{7}$ yi eklemek demektir.

Buradan, rasyonel sayılar kümesinin çıkarma işlemine göre kapalı olduğunu da anlarız.

Tanım : İki rasyonel sayının farkını bulmak için, eksilen rasyonel sayıya, çıkarılan rasyonel sayının toplamaya göre tersi olan rasyonel sayı eklenir.

1–1.19. Rasyonel Sayılar Kümesinde Çarpma İşlemi

Tanım : Genel olarak $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in R$ için,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \text{ dir.}$$

1–1.20. Çarpma İşleminin Özelikleri

1. Örnek :

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{11} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 11} = \frac{21}{55} \text{ ve } \frac{21}{55} \in R$$

2. Örnek :

$$\frac{5}{9} \cdot \frac{-4}{7} = \frac{5 \cdot -4}{9 \cdot 7} = \frac{-20}{63} \text{ ve } \frac{-20}{63} \in R$$

3. Örnek :

$$\frac{-5}{8} \cdot \frac{-13}{5} = \frac{-5 \cdot (-13)}{8 \cdot 5} = \frac{65}{40} \text{ ve } \frac{65}{40} \in R$$

Sonuç : Rasyonel sayılar kümesi, çarpma işlemine göre kapalıdır.

4. Örnek :

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{-8}{5} = \frac{-8}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{-24}{35}$$

eşitlikleri, size çarpma işleminde **değişme özeliğinin** varlığını anlatır mı? evet

5. Örnek :

$$\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{-4}{7}\right) \cdot \frac{-11}{3} = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{-4}{7} \cdot \frac{-11}{3}\right)$$

$$\frac{-12}{35} \cdot \frac{-11}{3} = \frac{3}{5} \cdot \frac{44}{21}$$

$$\frac{132}{105} = \frac{132}{105}$$

eşitliği, size rasyonel sayılarda çarpma işleminin birleşme özelliğinin varlığını anlatır mı?

6. Örnek :

$$\frac{3}{8} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \text{ dir.}$$

Sonuç : 1 sayısı, rasyonel sayılar kümesinde çarpma işleminin etkisiz (birim) elemanıdır.

7. Örnek :

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{5} = \frac{40}{40} = 1 \text{ dir.}$$

8. Örnek :

$$\frac{14}{15} \cdot \frac{15}{14} = \frac{210}{210} = 1 \text{ dir.}$$

O halde $\frac{5}{8}$ ile $\frac{8}{5}$; $\frac{14}{15}$ ile $\frac{15}{14}$ çarpma işlemine göre ters elemanlardır.

Sonuç : Genel olarak; R de, $\frac{0}{b}$ hariç, her elemanın çarpma işlemine göre bir tersi vardır. $\frac{a}{b}$ nin çarpmaya göre tersi $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ ile gösterilir. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ dır.

Buna göre : $m \neq 0$ ve $n \neq 0$ olmak üzere, $\frac{m}{n} \in R$ nin, çarpma işlemine göre tersi $\frac{n}{m}$ dir.

9. Örnek :

$$\frac{4}{7} \cdot \left(\frac{5}{8} + \frac{6}{8}\right) = \left(\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{4}{7} \cdot \frac{6}{8}\right)$$

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{11}{8} = \frac{20}{56} + \frac{24}{56}$$

$$\frac{44}{56} = \frac{44}{56}$$

10. Örnek :

$$\frac{10}{3} \cdot \left(\frac{8}{13} - \frac{6}{13}\right) = \left(\frac{10}{3} \cdot \frac{8}{13}\right) - \left(\frac{10}{3} \cdot \frac{6}{13}\right)$$

$$\frac{10}{3} \cdot \frac{2}{13} = \frac{80}{39} - \frac{60}{39}$$

$$\frac{20}{39} = \frac{20}{39}$$

Yukarıdaki işlemler size, çarpma işleminin, toplama ve çıkarma işlemleri üzerine **dağılma özeliğinin** varlığını anlatır mı?

1–1.21. Rasyonel Sayılar Kümesinde Bölme İşlemi

$\frac{3}{5} \cdot x = \frac{7}{8}$ eşitliği, " $\frac{3}{5}$ kesri, hangi x sayısı ile çarpılmalıdır ki; çarpım $\frac{7}{8}$ etsin anlamındadır." Bu eşitliğin iki yanı, $\frac{3}{5}$ kesrinin çarpma işlemine göre tersi olan $\frac{5}{3}$ kesri ile çarpıldığında, eşitliğin değerinin değişmeyeceğini biliyorsunuz. O zaman,

$$\left(\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot x = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{3}$$

$$1 \cdot x = \frac{35}{24} \quad (1 \cdot x = x \text{ tir}).$$

$$x = \frac{35}{24} \text{ bulunur.}$$

x için bulduğunuz $\frac{35}{24}$ rasyonel sayısı; $\frac{7}{8}$ kesrinin $\frac{3}{5}$ kesrine bölümüdür. Bu bölme işlemi, $x = \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{5}$ biçiminde gösterilir. Bulduğumuz bu sonuca göre, $\frac{7}{8}$ i $\frac{3}{5}$ e bölmek demek : $\frac{7}{8}$ kesrini $\frac{3}{5}$ kesrinin çarpma işlemine göre tersi olan $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{3}$ kesri ile çarpmak demektir. Şu halde, rasyonel sayılar kümesinde bölme işlemini :

Genel olarak, her $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in R$ ve $\frac{c}{d} \neq 0$ için;

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

biçiminde tanımlayabilirsiniz.

1. Örnek :

$$\frac{5}{9} : \frac{6}{7} = \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{-1} = \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{6} = \frac{35}{54} \in R$$

2. Örnek :

$$\frac{-13}{8} : \frac{-3}{4} = \frac{-13}{8} \cdot \frac{-4}{3} = \frac{52}{24} = \frac{13}{6} \in R$$

3. Örnek :

$$-8 : \frac{21}{4} = \frac{-8}{1} \cdot \frac{4}{21} = \frac{-32}{21} \in R$$

Sonuç : Rasyonel sayılar kümesi bölme işlemine göre kapalıdır.

1–1.22. Rasyonel Sayılarda Kuvvet (güç) Kavramı

1. Örnek :

$$5^2 = 5.5 = 25 \; ; \; \left(\frac{5}{1}\right)^2 = \frac{5}{1} \cdot \frac{5}{1} = \frac{25}{1} = 25 \text{ tir.}$$

2. Örnek :

$$\left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64} \text{ Olur.}$$

3. Örnek :

$$\left(\frac{-5}{6}\right)^2 = \frac{-5}{6} \cdot \frac{-5}{6} = \frac{25}{36} \text{ dır.}$$

4. Örnek :

$$\left(\frac{-5}{4}\right)^3 = \left(\frac{-5}{4} \cdot \frac{-5}{4}\right) \cdot \frac{-5}{4} = \frac{25}{16} \cdot \frac{-5}{4} = -\frac{125}{64} \text{ tür.}$$

Sonuç : Bir rasyonel sayının herhangi bir kuvvetini bulmak için, bu rasyonel sayının pay ve paydasının ayrı ayrı aynı kuvveti alınır.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki toplama işlemlerini yapınız.

a) $\frac{8}{9} + \frac{-5}{3} + \frac{13}{27} = ?$ b) $\frac{-19}{14} + \frac{6}{7} + \frac{3}{2} = ?$

c) $5\frac{3}{5} + \frac{17}{15} + 2\frac{4}{3} = ?$ d) $\frac{17}{12} + 4\frac{3}{4} + \frac{-19}{3} = ?$

2. Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapınız.

a) $\frac{-8}{15} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{21}{4} = ?$ b) $-2\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{-12}{7} = ?$

c) $\left(2 + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) = ?$ d) $\left(\frac{15}{4} - 4\right) \cdot \left(2 + 3\frac{1}{5}\right) = ?$

e) $\left(8 - \frac{6}{7}\right) \cdot \left(3\frac{1}{2} - 4\right) = ?$ f) $\left(1\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(1\frac{1}{8} \cdot \frac{-2}{3}\right)^2 = ?$

3. Aşağıdaki bölme işlemlerini yapınız.

a) $\frac{5}{12} : \frac{5}{6} = ?$ b) $\frac{-7}{18} : 3\frac{1}{2} = ?$ c) $4\frac{2}{3} : 4\frac{1}{4} = ?$

d) $-9 : 14\frac{2}{5} = ?$ e) $\frac{-7}{9} : 14 = ?$ f) $\frac{-8}{15} : 3\frac{1}{3} = ?$

4. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $\dfrac{-4\frac{2}{3}}{2 + \frac{1}{3}} = ?$ b) $\dfrac{1 - \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{5}} = ?$ c) $\dfrac{5 - \frac{1}{3}}{\frac{4}{9} + \frac{2}{3}} = ?$

d) $\dfrac{2 + \frac{1}{2} + \frac{-1}{3}}{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = ?$ e) $\dfrac{6\frac{1}{2} + 4\frac{2}{3}}{5\frac{3}{4} - 6\frac{1}{2}} = ?$

f) $\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = ?$ g) $\dfrac{3\frac{1}{2}-2\frac{3}{4}}{3\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}} + \dfrac{1\frac{1}{4}+2\frac{5}{6}}{3\frac{1}{3}-1\frac{1}{4}} = ?$

h) $\dfrac{2\frac{1}{5}-1}{2\frac{1}{5}\,.\,2\frac{1}{5}-1}\,.\,5\frac{1}{3} = ?$ ı) $\dfrac{3\frac{2}{5}-4\frac{1}{15}}{2\frac{8}{9}-3\frac{2}{3}} : \left(1-\frac{1}{5}\right) = ?$

Açıklama : Sorunun (1) şıkkının sonucunu bulmak için, aşağıdaki işlem sırasını izleyiniz. Diğer soruları da bu çözümden yararlanarak cevaplayınız.

(1) $\dfrac{3\frac{2}{5}-4\frac{1}{15}}{2\frac{8}{9}-3\frac{2}{3}} : \left(1-\frac{1}{5}\right) = \dfrac{\frac{17}{5}+\frac{-61}{15}}{\frac{26}{9}-\frac{11}{3}} : \left(\frac{5}{5}-\frac{1}{5}\right)$

$= \dfrac{\frac{51}{15}+\frac{-61}{15}}{\frac{26}{9}+\frac{-33}{9}} : \left(\frac{5}{5}+\frac{-1}{5}\right) = \dfrac{\frac{-10}{15}}{\frac{-7}{9}} : \frac{4}{5}$

$= \left(\dfrac{-2}{3}\cdot\dfrac{-9}{7}\right) : \dfrac{4}{5} = \dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{5}{4} = \dfrac{15}{14} = 1\,\dfrac{1}{14}$

1–2. RASYONEL SAYILARIN ONDALIK OLARAK GÖSTERİLMESİ

Ondalık sayıları ve bu sayılar üzerinde yapılan toplama, çıkarma, çarpma, bölme işlemleri ile bu işlemlerin özeliklerini Ortaokul 1. sınıfta öğrenmiştiniz. Biz bu kesimde, rasyonel sayıların ondalık sayılara, ondalık sayıların rasyonel sayılara çevrilmeleri ile devirli ondalık açılımlar üzerinde duracağız.

Payların herhangi bir tamsayı, paydaları 10 un pozitif tamsayı kuvvetleri olan $\frac{a}{10^n}$ (her $a \in T$ ve $n \in T^+$) biçimindeki rasyonel sayılara ondalık sayılar denir.

$\frac{7}{10^1} = \frac{7}{10} = 0{,}7$; $\frac{19}{10^2} = \frac{19}{100} = 0{,}19$; $\frac{47}{10^3} = \frac{47}{1000} = 0{,}047$;

$-\frac{13}{1000} = -0{,}013$; $-\frac{643}{100} = -6{,}43$ gibi.

1–2.1 Rasyonel sayıların ondalık sayılara çevrilmesi

1. Örnek :

$\frac{4}{5}$ rasyonel sayısını genişleterek, $\frac{4}{5} = \frac{4\,.\,2}{5\,.\,2} = \frac{8}{10}$ biçiminde yazabiliriz. $\frac{4}{5}$ ve $\frac{8}{10}$ denk kesirlerdir. $\frac{8}{10} = 0{,}8$ olduğundan, $\frac{4}{5}$ rasyonel sayısı; 0,8 ondalık sayısına eşit olur ve $\frac{4}{5} = 0{,}8$ biçiminde gösterilir.

Buna göre, rasyonel sayının payını paydasına bölerek, bu rasyonel sayıyı ondalık sayı biçiminde ifade edebiliriz. $\frac{4}{5} = 0{,}8$ sayısında, 8 in sağına istenildiği kadar sıfır konulabildiğini ve bu halde de bu ondalık sayının değerinin değişmeyeceğini biliyoruz. $0{,}8 = 0{,}8000\ldots$ gibi.

İşte, $\frac{4}{5} = 0{,}8000\ldots$ sayısına $\frac{4}{5}$ rasyonel sayısının ondalık açılımı diyeceğiz. Burada tekrarlanan rakam, 0 dır.

2. Örnek :

$\frac{45}{8}$ rasyonel sayısını, ondalık sayı biçiminde ifade etmek istersek :

45	8
−40	5,625
50	
− 48	
20	
− 16	
40	
− 40	
00	

Öyleyse, $\frac{45}{8} = 5{,}625$ elde edilir. Bölmeyi daha da sürdürseydik, üçüncü ondalık basamaktan sonraki bütün rakamları "0" olarak elde ederdik. Buna göre, $\frac{45}{8}$ in ondalık açılımı $\frac{45}{8} = 5{,}625000\ldots$ olur.

3. Örnek :

$\frac{475}{33}$ kesrini ondalık sayı olarak yazalım :

475	33
− 33	14,39
145	
− 132	
130	
− 99	
310	
− 297	
13	

Bölme işlemine devam edersek, kalanlar ikinci adımdan sonrakiler gibi, 13 ve 13 olacak, bu nedenle bölümde 3 ve 9 rakamları tekrar tekrar devredecektir.

Bu tür ondalık açılımlara, devirli ondalık açılımlar denir ve devreden sayı dizisi üzerine bir çizgi çekilerek belirtilir. Buna göre,

$$\frac{45}{8} = 5{,}6250 \text{ ve } \frac{475}{33} = 14{,}39 = 14{,}393939 \ldots$$

biçiminde yazılır.

Diğer bazı rasyonel sayıların ondalık açılımları da :

$\frac{1}{2} = 0{,}5\overline{0}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} = 0{,}66\ldots = 0{,}\overline{6}$

$\frac{3}{4} = 0{,}75\overline{0}$ $\qquad$ $\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots = 0{,}1\overline{6}$

$\frac{1}{4} = 0{,}25\overline{0}$ $\qquad$ $\frac{3}{7} = 0{,}\overline{428571}$

$\frac{3}{8} = 0{,}375\overline{0}$ $\qquad$ $\frac{7}{13} = 0{,}\overline{538461}$

$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$ $\qquad$ $\frac{2}{11} = 0{,}1818\ldots = 0{,}\overline{18}$ dir.

Sonuç : Genel olarak, $\frac{a}{b}$ gibi her rasyonel sayının bir ondalık açılımı vardır.

1–2.2. Ondalık Sayınların Rasyonel Sayılara Çevrilmesi

Her rasyonel sayının bir ondalık açılımı olduğuna göre, bunun karşıtı olarak, her devirli ondalık açılım bir rasyonel sayıdır.

1. Örnek :

Verilen ondalık sayı, 3,750 olsun, Devreden rakamı "0" olan ondalık sayıları rasyonel sayılara çevirirken; bu ondalık sayıların karşıtı olan, rasyonel sayının, payı verilen ondalık sayı, paydası da 10 un bu ondalık sayının ondalık kısmındaki (virgülün sağındaki) basamak sayısı kadar kuvvetine eşittir. Bu nedenle :

$$3{,}750 = \frac{375}{10^2} = \frac{375}{100} = \frac{15}{4} \text{ tür.}$$

2. Örnek :

Verilen sayılar, a = 0,415; b = 0,0032 olsun. Bu ondalık sayılara karşılık gelen rasyonel sayılar;

$$a = 0{,}415 = \frac{415}{1000} = \frac{83}{200}$$

$$b = 0{,}0032 = \frac{32}{10000} = \frac{2}{625} \text{ olur.}$$

3. Örnek :

$0{,}\overline{4}$ devirli ondalık kesri, hangi rasyonel sayının açılımıdır? Bunu $x = 0{,}\overline{4}$ diye gösterelim. Her iki yanı 10 ile çarpıp, bundan $x = 0{,}\overline{4}$ ü çıkaralım :

$$\begin{array}{r} 10x = 4{,}\overline{4} \\ -\quad x = 0{,}\overline{4} \\ \hline 9x = 4{,}\overline{0} \end{array}$$

$x = \frac{4}{9}$ olur. O halde, $x \in R$ dir.

4. Örnek :

$x = 1,1\overline{6}$ olsun. Her iki tarafı önce 100, sonra da 10 ile çarpıp, taraf tarafa çıkaralım :

$$\begin{array}{rl} 100x = & 116,\overline{6} \\ -\ 10x = & 11,\overline{6} \\ \hline 90x = & 105,\overline{0} \end{array}$$

$$x = \frac{105}{90} = \frac{7}{6} \text{ ve } \frac{7}{6} \in R \text{ dir.}$$

5. Örnek :

$x = 0,6\overline{12}$ olsun. Her iki yanı önce 1000, sonra 10 ile çarpıp, taraf tarafa çıkaralım :

$$\begin{array}{rl} 1000x = & 612,\overline{12} \\ -10x = & 6,\overline{12} \\ \hline 990x = & 606,\overline{0} \end{array}$$

$$x = \frac{606}{990} \text{ ve } \frac{606}{990} \in R \text{ dir.}$$

6. Örnek :

$x = 0,\overline{837}$ olsun. Her iki yanı 1000 ile çarpıp, taraf tarafa çıkaralım :

$$\begin{array}{rl} 1000x = & 837,\overline{837} \\ -\ x = & 0,\overline{837} \\ \hline 999x = & 837,\overline{0} \end{array}$$

$$x = \frac{837}{999} = \frac{93}{111} = \frac{31}{37} \in R \text{ dir.}$$

7. Örnek :

$x = 1,76\overline{56}$ olsun. Her iki yanı önce 10000, sonra 100 ile çarpıp, taraf tarafa çıkaralım :

$$\begin{array}{rl} 10000x = & 17656,\overline{56} \\ -\ 100x = & 176,\overline{56} \\ \hline 9900x = & 17480,\overline{0} \end{array}$$

$$x = \frac{17480}{9900} = \frac{874}{495} \text{ bulunur.}$$

8. Örnek :

$x = 0,6\overline{9}$ olsun. Daha önce uyguladığımız yöntemle x rasyonel sayısını bulalım :

$$\begin{array}{rl} 100x = & 69,\overline{9} \\ -\ 10x = & 6,\overline{9} \\ \hline 90x = & 63,\overline{0} \end{array}$$

$$x = \frac{63}{90} = \frac{7}{10} = 0,7 \text{ dir.}$$

Burada, x rasyonel sayının değişik iki ondalık açılımı olduğunu görüyorsunuz.

$$x = 0,7 = 0,6\overline{9}$$

Bu örneğe göre, devreden 9 yerine, 9 dan önceki sayıya 1 eklemekle 0 ın devrettiği bir açılım elde ediyoruz. Her iki açılım da aynı rasyonel sayıya karşılık gelmektedir. Bunun tersi de doğrudur. Bu nedenle, belli bir basamaktan sonra "0" ın devrettiği bir ondalık açılımın, "0" dan önceki rakamı 1 azaltılarak, 9 larla devreden bir ondalık açılım biçiminde yazılabilir. ($x = 0,7 = 0,6\overline{9}$ örneğinde olduğu gibi).

O halde, her rasyonel sayının, 9 lar halinde devretmeyen, devirli bir ondalık açılımı vardır. Bu tür devirli her ondalık açılım, bir rasyonel sayıya karşılık gelir.

Öyleyse, rasyonel sayılarla devirli ondalık açılımlar arasında, bir "**bire-bir**" eşleme vardır.

Uyarı : Yukarıdaki örneklerde, eşitliğin her iki yanını 10, 100, 1000 ,... ile çarparken; virgülü, devreden sayının önce sağına, sonra soluna getirdiğimize dikkat ediniz.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki rasyonel sayıları, ondalık sayılara çeviriniz.

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{17}{8}$ c) $\frac{29}{6}$ d) $\frac{75}{4}$

e) $\frac{19}{3}$ f) $\frac{31}{7}$ g) $\frac{83}{8}$ h) $\frac{11}{12}$

2. Aşağıdaki ondalık sayıları, rasyonel sayılara çeviriniz.

a) 7,675 b) 0,0048 c) 3,0067

d) –5,028 e) –19,05 f) –0,0024

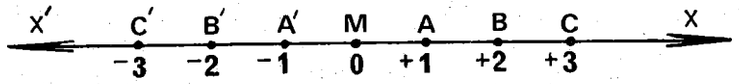
ğ) $2,\overline{5}$ h) $0,\overline{16}$ ı) $2,\overline{37}$

i) $0,2\overline{12}$ j) $0,\overline{315}$ k) $1,51\overline{37}$

l) $0,\overline{9}$ m) $2,\overline{9}$ n) $4,1\overline{9}$

p) $0,\overline{45}$ r) $0,\overline{714285}$ s) $1,\overline{857142}$

1–3. SAYI DOĞRUSU ÜZERİNDE RASYONEL SAYILAR

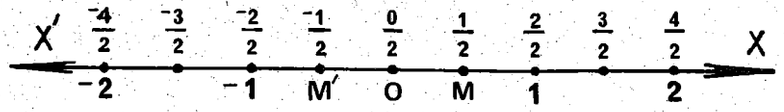


5. Şekil

5. Şekilde gördüğünüz gibi, Yatay bir X′X doğrusu üzerinde, M noktasını alalım. M noktası, bu doğruyu [MX ve MX′ ışınlarına ayırır. M ye, başlangıç noktası denir. M noktasının sağında ([MX ışını üzerinde), | MA | = 1 birim, | MB | = 2 birim, | MC | = 3 birim uzunluklarını alırsak; M noktası 0 sayısının, A, B, C noktaları da 1, 2, 3, sayılarının görüntüleri olur.

Bu kez, M noktasının solunda ([MX′ ışını üzerinde), | MA′ | = 1 birim, | MB′ | = 2 birim, | MC′ | = 3 birim uzunluklarını alırsak; A′, B′ ve C′ noktaları da –1, –2 ve –3 sayılarının görüntüleridir.

İşte, sayılar ile bu sayılara karşılık gelen noktalar, bir doğru üzerinde gösterildiğinde, sayı doğrusu elde edilir. (5. şekildeki X′X doğrusu). Sayı doğrusu üzerinde, ardışık iki tamsayının görüntü noktaları arasında, bir tamsayının görüntüsü olacak başka bir nokta yoktur. Yani, 2 ve 3 tamsayıları arasında başka bir tamsayı yoktur. Bu nedenle sayı doğrusu, tamsayıların görüntü noktaları ile doldurulamaz.



6. Şekil

Rasyonel sayıları da tamsayılarda olduğu gibi, sayı doğrusu üzerine yerleştirebiliriz. 6. şekilde gördüğünüz, uçları 0 ile 1 sayısına karşılık gelen doğru parçasının M orta noktası, $\frac{1}{2}$ rasyonel sayısının; uçları 0 ile –1 sayısına karşılık gelen doğru parçasının M′ orta noktası da $-\frac{1}{2}$ rasyonel sayısına karşılık gelen noktadır. M ve M′ noktalarının, başlangıç noktasına uzunlukları, sağ ve sol yönlere doğru eklenerek, $\frac{1}{2}$ nin katları olan **pozitif ve negatif** rasyonel sayıların görüntü noktaları elde edilir. Her rasyonel sayı, aynı yöntemle sayı doğrusu üzerine yerleştirilebilir.

Rasyonel Sayıların Yoğunluğu

Tanım : Genel olarak, her $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} \in R$ ve $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ise;

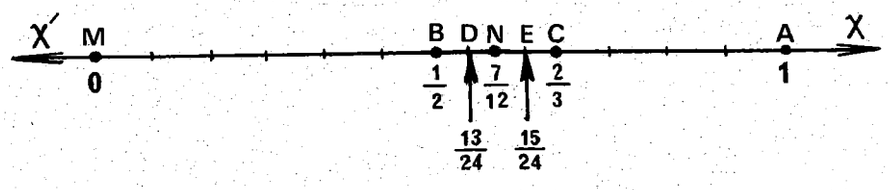
$$\frac{a}{b} < \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) < \frac{c}{d} \text{ dir.}$$

1. Örnek :

$\frac{1}{2}$ ve $\frac{2}{3}$ sayıları arasına, iki rasyonel sayı yerleştirelim :

Tanıma göre :

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \frac{1.3 + 2.2}{2.2.3} = \frac{7}{12} \text{ dir.}$$



7. Şekil

7. Şekilde, $\frac{7}{12}$ rasyonel sayısına karşılık gelen görüntü noktasının, uçları $\frac{1}{2}$ ve $\frac{2}{3}$ rasyonel sayılarının görüntüleri olan [BC] nın ($|MN| = \frac{7}{12}$ birim uzunluğu ile belli) N orta noktası olduğunu görüyorsunuz.

Öyleyse, $\frac{1}{2} < \frac{7}{12} < \frac{2}{3}$ sıralamasını yapabiliriz.

Gerçekten, $\frac{6}{12} < \frac{7}{12} < \frac{8}{12}$ dir.

Bu kez, $\frac{1}{2}$ ile $\frac{7}{12}$ arasındaki rasyonel sayıyı bulalım :

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{12}\right) = \frac{1.12 + 2.7}{2.2.12} = \frac{26}{48} = \frac{13}{24} \text{ tür.}$$

O halde, $\frac{1}{2} < \frac{13}{24} < \frac{7}{12}$ sıralaması yapılabilir. $\frac{13}{24}$ sayısının, 7. şekildeki görüntüsünün [BN] nın ($|MD| = \frac{13}{24}$ birim ile belli olan), D orta noktası olduğunu da görüyorsunuz.

Şimdi de, $\frac{7}{12}$ ile $\frac{2}{3}$ arasında bir rasyonel sayı bulalım :

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{12} + \frac{2}{3}\right) = \frac{3.7 + 12.2}{2.12.3} = \frac{45}{72} = \frac{15}{24} \text{ tür.}$$

Şu halde, $\frac{7}{12} < \frac{15}{24} < \frac{2}{3}$ sıralaması da yapılabilir. $\frac{15}{24}$ sayısının, 7. şekildeki görüntüsü; [NC] nın ($|ME| = \frac{15}{24}$ birim ile belli olan), E orta noktası mıdır?

Bunlara göre, $\frac{1}{2} < \frac{13}{24} < \frac{7}{12} < \frac{15}{24} < \frac{2}{3}$ sıralamasını yapabilir miyiz? Gerçekten, $\frac{12}{24} < \frac{13}{24} < \frac{14}{24} < \frac{15}{24} < \frac{16}{24}$ olur mu?

2. Örnek :

$\frac{2}{3}$ ve $\frac{3}{4}$ sayıları arasına, iki rasyinel sayı yerleştirelim :

$\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ olduğu kolayca görülür. $\left(\frac{8}{12} < \frac{9}{12} \text{ dir.}\right)$

$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) = \frac{2.4 + 3.3}{2.3.4} = \frac{8 + 9}{24} = \frac{17}{24}$ ve $\frac{2}{3}$ ile $\frac{3}{4}$ arasında olan bir sayıdır. $\frac{2}{3} < \frac{17}{24} < \frac{3}{4}$ tür.

Bu kez, $\frac{2}{3}$ ile $\frac{17}{24}$ arasında olan başka bir sayıyı aynı yöntemle bulalım :

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{17}{24}\right) = \frac{2.24 + 3.17}{2.3.24} \quad \frac{48 + 51}{144} = \frac{11}{16} \text{ dır.}$$

Bu sayıları,

$$\frac{2}{3} < \frac{11}{16} < \frac{17}{24} < \frac{3}{4}$$

biçiminde yazabilir miyiz? Gerçekten,

$$\frac{96}{144} < \frac{99}{144} < \frac{102}{144} < \frac{108}{144} \text{ olur mu?}$$

Böylece, bu tür işlemlere, istenildiği kadar devam edilirse, her iki rasyonel sayıya karşılık gelen iki noktanın ortası, yeni bir rasyonel sayıya karşılık gelir. Bu özelik nedeniyle rasyonel sayılar "**yoğundur**" denir. Rasyonel sayılar kümesi **yoğun** olduğundan, sayı doğrusunun tamamının rasyonel sayılarla doldurulabileceği düşünülürse de, bunun böyle olmadığını göstereceğiz.

1-4. RASYONEL OLMAYAN (İRRASYONEL) SAYILAR

Rasyonel sayıların yoğun oluşu özeliğine göre, sayı doğrusunun her noktası ile rasyonel sayılar arasında bir "**bire-bir**" eşleme yapılabileceği düşünülürse de, bu eşlemenin yapılamayacağından söz etmiştik.

Şimdi, bu önermenin doğruluğunu gösterelim.

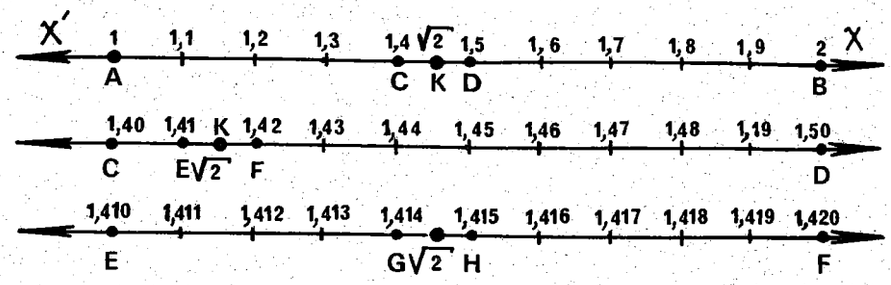
Örneğin, karesi 2 ye eşit olan bir rasyonel sayının bulunamayacağını gösterirsek, sayı doğrusunun rasyonel sayılarla doldurulamayacağını göstermiş oluruz.

$a^2 = 2$ olan bir a sayısı, $a = \sqrt{2}$ biçiminde gösterilir ve "**kare kök iki**" diye okunur. Bu a sayısı, 1 ile 2 tamsayıları arasında bir sayıdır. gerçekten, $1^2 = 1$ ve $2^2 = 4$ olduğundan, $1 < a < 2$ olur.

Yine, $(1{,}4)^2 = 1{,}96$ ve $(1{,}5)^2 = 2{,}25$ olduğundan $1{,}4 < a < 1{,}5$ olur. Böylece, devam edersek, aşağıdaki eşitliksizlikler yazılabilir.

$$1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$
$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Bu durumları, 8. şekilde gördüğünüz gibi, sayı doğrusu üzerinde gösterelim :



8. Şekil

Şekilde, $|AB| = 1$ birim uzunluk seçilmiş ve her defasında 10 a bölünerek; [AB] nın $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... birim uzunluklarında olan [CD], [EF], [GH],... doğru parçaları elde edilmiştir. Bu tür işlemleri sürdürürsek, iç içe birbirini kapsayan $[AB] \supset [CD] \supset [EF] \supset [GH]\ldots$ doğru parçalarını her defasında, bir öncekinin $\frac{1}{10}$ u kadar küçültürsek, uç noktalarının $\sqrt{2}$ sayısının görüntüsü olan K ortak noktasına ve en son doğru parçasının uzunluğunun da sıfıra yaklaştığını düşünebiliriz. Oysa, rasyonel sayılar kümesinde kalsaydık ve aralıkların yalnız rasyonel sayıları içine aldığını düşünseydik, bu aralıkların bir ortak noktası olmayacaktı. Sayı doğrusunda, K noktasına karşılık gelen $\sqrt{2}$ sayısı, bu doğru parçalarının, uç noktalarından hiç birine karşılık gelemez. Bu nedenle, $\sqrt{2}$ sayısı, rasyonel bir sayı değildir.

Bir de şöyle düşünelim : $\sqrt{2}$ sayısı, bir rasyonel sayı olsaydı, bu sayı, aralarında asal olan $m, n \in T^+$ sayılarını kullanarak $\frac{m}{n}$ biçiminde yazılabilir ve

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = 2 \text{ ise, } \frac{m^2}{n^2} = 2 \text{ olurdu.}$$

Buradan, $m^2 = 2n^2$ bulunur. $n \in T^+$, ne olursa olsun, $2n^2$ çift bir sayı olduğundan, m^2 de çift bir sayı olur. Biz, çift olan bir sayının karesinin çift bir sayı olacağını biliyoruz. ($4^2 = 16$, $8^2 = 64$ gibi).

Öyleyse, bir $m \in T^+$ için, $m = 2k$ yazılabilir. m yerine 2k yazarak, $(2k)^2 = 2n^2$ ise, $4k^2 = 2n^2$ ve $2k^2 = n^2$ bulunur. $2k^2$ çift bir sayı olduğundan, n^2 de çift bir sayı olup, bunun sonucu olarak, n de çift bir bir sayı olur.

Böylece, 2 nin, m ile n nin bir ortak çarpanı olduğu anlaşılır. Oysa, biz m ile n yi, aralarında asal aldığımızdan bu mümkün değildir. Şu halde, $\left(\frac{m}{n}\right)^2$ hiçbir zaman 2 ye eşit olamaz. Bu nedenle, sayı doğrusunun rasyonel sayılarla da oldurulamayacağı anlaşılır.

İşte, $\sqrt{2}$ gibi, sayı doğrusunda bir görüntüsü olduğu halde, rasyonel olmayan sayılara **irrasyonel sayılar** denir. (Kompleks sayılar hariç).

$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$,... sayıları, irrasyonel sayılara birer örnektir. İrrasyonel sayıların oluşturduğu kümeye, **irrasyonel sayılar kümesi** denir.

Yukarıda, karesi 2 ye eşit olan ($a^2 = 2$) bir a sayısını, $a = \sqrt{2}$ biçiminde göstermiş ve "**karekök iki**" diye ifade etmiştik.

Genel olarak, karesi verilen bir b pozitif sayısına eşit bir tek pozitif a sayısı vardır. Yani, $a^2 = b$ ($b > 0$) şartını gerçekleyen, bir tek $a > 0$ sayısı vardır. Bu sayı, $a = \sqrt{b}$ biçiminde yazılıp; "**a eşit, karekök b**" diye okunur.

Bu tanıma göre :

$a^2 = 0$ ise, $a = \sqrt{0} = 0$ dır.
$a^2 = 1$ ise, $a = \sqrt{1} = 1$ dir.
$a^2 = 3$ ise, $a = \sqrt{3}$ tür.
$a^2 = 4$ ise, $a = \sqrt{4} = 2$ dir.
$a^2 = 5$ ise, $a = \sqrt{5}$ tir.
$a^2 = 9$ ise, $a = \sqrt{9} = 3$ tür.

Bunlar gibi :

$\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{121} = 11$, $\sqrt{144} = 12$, $\sqrt{169} = 13$, $\sqrt{196} = 14$, $\sqrt{225} = 15$, $\sqrt{400} = 20$, $\sqrt{625} = 25$ tir.

Köklü ifadelerde, $a \geqslant 0$ ve $b \geqslant 0$ sayıları için, $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ önermesi doğrudur. (Bu önermenin isbatı, Lise 1. sınıfta yapılacaktır).

Örneğin :

$$\sqrt{9.16} = \sqrt{9}.\sqrt{16}$$
$$\sqrt{144} = 3 . 4$$
$$12 = 12 . \text{ dir.}$$

Bu önermeden yararlanarak, aşağıdaki işlemleri yapabiliriz.

a) $\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = \sqrt{4}.\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ dir.
b) $\sqrt{12} = \sqrt{4.3} = \sqrt{4}.\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ tür.
c) $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = \sqrt{9}.\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ dir.
d) $\sqrt{24} = \sqrt{4.6} = \sqrt{4}.\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ dır.
e) $\sqrt{27} = \sqrt{9.3} = \sqrt{9}.\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ tür.
f) $\sqrt{48} = \sqrt{16.3} = \sqrt{16}.\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ tür.
g) $\sqrt{50} = \sqrt{25.2} = \sqrt{25}.\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ dir.
h) $\sqrt{125} = \sqrt{25.5} = \sqrt{25}.\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$ tir.
ı) $\sqrt{300} = \sqrt{100.3} = \sqrt{100}.\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ tür.
i) $\sqrt{2} = \sqrt{50} = \sqrt{2.50} = \sqrt{100} = 10$ dur.
j) $\sqrt{6} . \sqrt{24} = \sqrt{6.24} = \sqrt{144} = 12$ dir.
k) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (5+3).\sqrt{2}$ (dağılma özeliği).
$= 8\sqrt{2}$ dir.
l) $7\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = (7-4)\sqrt{6}$ (Dağılma özeliği).
$= 3\sqrt{6}$ dır.
m) $\sqrt{20} + \sqrt{45} = \sqrt{4.5} + \sqrt{9.5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
n) $\sqrt{75} - \sqrt{12} = \sqrt{25.3} - \sqrt{4.3} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

Buraya değin, sayma sayılarından başlayarak, ardarda genişletmelerle doğal sayıları, tamsayıları, rasyonel sayıları, irrasyonel sayıları elde ettik; bunlar üzerinde uygulanan işlemlerin kurallarını ve özeliklerini inceledik.

Rasyonel sayılarla irrasyonel sayıların oluşturduğu kümeye, gerçek (reel) sayılar kümesi denir ve G ile gösterilir.

Böylece, rasyonel sayılardan gerçek (reel) sayılara geçmekle (irrasyonel sayıları da sayı doğrusunda göstermekle), sayı doğrusunu doldurmuş oluruz. Yani, reel sayılarla, sayı doğrusunun her noktası arasında, bir "**bire-bir**" eşleme bağıntısı elde etmiş oluyoruz. Gerçek sayıların bu özeliğine, **Tamlık özeliği** denir.

Buna göre, buraya değin gördüğümüz sayı kümeleri arasında :

$D \subset T \subset R \subset G$ kapsama bağıntısını yazabiliriz.

Gerçek Sayılar Kümesinde İşlemler

Gerçek sayılar kümesi için, aşağıdaki özelikleri yazabiliriz.

1. Toplama, çıkarma, çarpma ve sıfır hariç (bir sayının sıfıra bölümünün tanımsız olduğunu hatırlayınız) bölme işlemlerine göre kapalıdır.

2. Toplama ve çarpma işlemlerinin değişme özeliği vardır.

3. Toplama ve çarpma işlemlerinin birleşme özeliği vardır.

4. Toplama işleminin birim elemanı 0 sayısı, çarpma işlemin birim elemanı 1 sayısıdır.

5. Her elemanın, toplama işlemine göre tersi olan bir eleman vardır.

6. 0 dan başka her elemanın, çarpmaya göre tersi olan bir eleman vardır.

7. Çarpma işleminin yutan elemanı 0 (sıfır) dır.

8. Çarpma işleminin, toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özeliği vardır.

Not : Bu özelikleri gerçekleyen işlemleri yapınız.

ALIŞTIRMALAR

1. $\frac{3}{4}$ ile $\frac{4}{5}$ sayıları arasına, iki rasyonel sayı yerleştiriniz.

2. $\frac{1}{2}$ ile $\frac{5}{6}$ sayıları arasına üç rasyonel sayı yerleştiriniz.

3. Ardışık iki tamsayı arasında (5,6 gibi) olan ilk rasyonel sayı için ne düşünürsünüz?

4. Aşağıdaki işlemleri, a. $\sqrt{b}$ biçiminde yazınız.

Uyarı : Kök içindeki sayıların, asal çarpanlarından yararlanınız.

a) $\sqrt{28}$ b) $\sqrt{32}$ c) $\sqrt{72}$ d) $\sqrt{80}$

e) $\sqrt{500}$ f) $\sqrt{128}$ g) $\sqrt{180}$ h) $\sqrt{243}$

5. Aşağıdaki işlemleri, dağılma özeliğinden yararlanarak yapınız. Bulduğunuz sonuçlara göre, irrasyonel sayıların toplam ve farkının, nasıl bir sayı olduğunu belirtiniz.

a) $6\sqrt{3}+2\sqrt{3}$ b) $\sqrt{7}+4\sqrt{7}+2\sqrt{7}$

c) $8\sqrt{5}-3\sqrt{5}$ d) $7\sqrt{3}-5\sqrt{3}+3\sqrt{3}$

6. $\sqrt{3}\,.\,\sqrt{12}=?$ ve $\sqrt{5}\,.\,\sqrt{6}=?$ çarpımlarının sonuçlarına göre, bazı irrasyonel sayıların çarpımı bir rasyonel sayıdır, diyebilir misiniz?

7. $\sqrt{8}\,.\,\sqrt{32}=16$ eşitliği doğru mudur?

8. Aşağıdaki sayılardan hangileri rasyoneldir?

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{1}$ c) $\sqrt{16}$

d) $\sqrt{8}$ e) $\sqrt{6}.\sqrt{2}$ f) $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}$

g) $2\sqrt{3}+\sqrt{3}$ h) $4\sqrt{5}-\sqrt{5}$

9. $A=\left\{-6, \frac{2}{3}, 3, \frac{5}{7}, -\sqrt{7}, \sqrt{5}\right\}$ kümesinin elemanlarının, toplama işlemine göre terslerinin oluşturduğu B kümesini yazınız.

BİRİNCİ BÖLÜMÜN TEST SORULARI

1. $A=\{0, 1, 2, 3, \ldots, 12\}$ ve $B=\{5, 6, 7, \ldots, 16\}$ ise, $s(A \cup B)$ sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 15 b) 17 c) 26 d) 23 c) 28

2. 1. sorudaki A ve B kümelerinde $s(A \cap B)$ sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 7 b) 12 c) 9 d) 8 e) 13

3. Aşağıdaki kümelerden hangisi, hem toplama, hem de çarpma lemine göre **kapalı değildir**?

a) $\{0, 2, 4, 6, \ldots, 30\}$ b) $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ c) $\{0, 1\}$
d) $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ e) $\{-1, 0, 1\}$

4. $(6,13) + (16,11) = ?$ hangi tamsayıdır?

a) 2 b) 12 c) -12 d) -7 e) -2

5. $(4,9) \cdot (3,6) = ?$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) -15 b) 20 c) 15 d) 12 e) -12

6. $(5-8) \cdot [(-2) \cdot (-4)] = ?$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) -24 b) 24 c) -32 d) 40 e) 18

7. $5 \cdot (3 - x) \cdot 2 = 0$ ise, x sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 0 b) 7 c) 4 d) 3 e) -3

8. Aşağıdakilerden hangisi **yanlıştır**?

a) $(-5)^3 = -125$ b) $(-1)^5 = 1$ c) $(7-7) \cdot 3 = 0$
d) $2^7 = 128$ e) $(-3)^4 = 81$

9. $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right) = ?$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{5}{3}$ b) 1 c) -2 d) $-\frac{1}{5}$ e) -1

10. $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}$ işleminin sonucu, aşağıdakilerden hangisidir?

a) $-\frac{1}{6}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $-\frac{3}{4}$

11. $\dfrac{1}{2 - \dfrac{1}{2 - \frac{1}{2}}}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{3}$ c) -2 d) $-\frac{2}{3}$ e) $\frac{5}{4}$

12. $x = 0,0\,8$ ise, x hangi rasyonel sayıdır?

a) $\frac{38}{99}$ b) $\frac{38}{90}$ c) $\frac{7}{18}$ d) $\frac{35}{99}$ e) $\frac{5}{18}$

13. $\sqrt{252}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) $6\sqrt{6}$ b) $9\sqrt{7}$ c) $7\sqrt{6}$ d) $12\sqrt{3}$ e) $6\sqrt{7}$

14. $4\sqrt{3} \cdot \sqrt{75} = ?$ işleminin sonucu nedir?

a) 60 b) 48 c) 30 d) $20\sqrt{3}$ e) $12\sqrt{5}$

15. Aşağıdakilerden hangisi rasyoneldir?

a) $2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$ b) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{36}$ c) $6\sqrt{7} - 5\sqrt{7}$
d) $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{48}$ e) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}$

İKİNCİ BÖLÜM

PERMÜTASYON, KOMBİNASYON VE OLASILIK

2-1. PASCAL ÜÇGENİ

Dört elemanlı K = { A, B, C, D } kümesi verilsin. Bu kümenin, alt kümelerini bulalım. Her kümenin, eleman sayısı sıfır olan alt kümesine boş küme denildiği ve her kümenin ancak bir tane boş alt kümesi olduğunu biliyorsunuz. Buna göre, K kümesinde alt küme dağılışı şöyledir : Boş küme sayısı 1; bir elemanlı kümelerin sayısı { A }, { B }, { C }, { D } olmak üzere 4; iki elemanlı kümelerin sayısı { A, B }, { A, C }, { A, D }, { B. C }, { B, D }, { C, D } olmak üzere 6; üç elemanlı kümelerin sayısı { A, B, C }, { A, B, D }, { A, C, D }, { B, C, D } olmak üzere 4; dört elemanlı alt küme sayısı da (K kümesinin kendisi) 1 dir. Bu sayıları, alt kümelerin artan genişliğine göre yazarsak :

1 4 6 4 1

dizisini elde ederiz.

Altı elemanlı bir küme için, benzer sonuçları gösteren dizi;

1 6 15 20 15 6 1

Beş elemanlı bir küme için, benzer sonuçları gösteren dizi;

1 5 10 10 5 1

Üç elemanlı bir küme için, benzer sonuçları gösteren dizi;

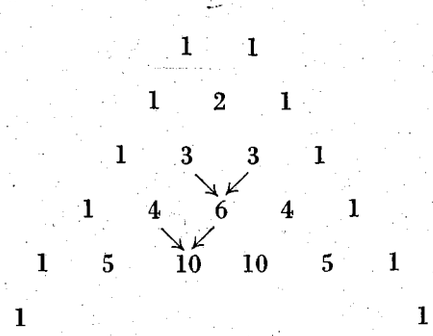
1 3 3 1

İki elemanlı bir küme için, benzer sonuçları gösteren dizi;

1 2 1

Bir elemanlı bir küme için, benzer sonuçları gösteren dizi;
olur mu ? 1 1

Bu dizileri, bir elemanlı kümeden başlayarak, alt alta satırlar biçiminde yazalım :



Elde ettiğimiz bu çizelge, Pascal (Paskal) üçgeninin bir arçasıdır. (Pascal ünlü bir Fransız matematikçisi olup, 17. yüzyılda yaşamıştır). Bu çizelgenin tepesine, 1 sayısı köşe olacak biçimde eklenirse, çizelge bir üçgene benzer. Bu köşe çoğu kez eklenir, fakat biz şimdilik bunun üzerinde durmayacağız. Burada elde ettiğimiz Pascal üçgenini, istediğimiz büyüklükte kurma olanağı vardır.

Bu çizelgeden yararlanarak, K = { A, B, C, D } kümesinin, iki elemanlı alt kümelerinin sayısını tekrar inceleyelim. Çizelgedeki 6, aranılan sayıdır.

İki elemanlı bir alt kümede, D elemanı ya bulunur. ya da bulunmaz. Bu iki durum üzerinde daha fazla çalışma yapalım :

1. D nin elemanı olduğu alt kümeler: { A, D }, { B, D } ve { C, D } midir?

2. 1. Sorudaki alt kümelerin sayısı, üç elemanlı bir E = { M, N, P } kümesinin, bir elemanlı al kümelerinın sayısına eşit midir?

3. K = { A, B, C, D } kümesinde, Dnin elemanı bulunmadığı iki elemanlı alt kümeler; { A, B }, { A, C }, { B, C } midir?

4. 3. Sorudaki alt küme sayısı, üç elemanlı E = { M, N, P } kümesinin, iki elemanlı { M, N }, { M, P }, { N, P } alt kümelerinin sayısına eşit midir?

Bunlara göre, yukarıdaki çizelgede (Pascal üçgeni), üzerinde durduğumuz 6 sayısı, üstündeki satırda üç elemanlı bir kümenin bir elemanlı alt kümelerinin sayısı olan 3 ile iki elemanlı alt kümelerinin sayısı olan 3 ün toplamına eşit midir? (Bu durum çizelgede oklarla gösterilmiştir.

Aynı düşünüş yöntemiyle altı elemanlı { K, L, M, N, P, R } kümesinin, iki elemanlı alt kümelerinin sayısı olan 15, beş elemanlı { A, B,

C, D, E } kümesinin, bir elemanlı alt kümelerinin sayısı olan beş ile iki elemanlı alt kümelerinin sayısı olan 10 un toplamına eşit midir?

Öyleyse, çizelgenin, birler hariç her içeriğinin, bir önceki satırda kendisine en yakın olan iki sayının toplamına ve her satırda baştan ve sondan aynı uzaklıkta bulunan sayıların birbirlerine eşit olduğunu görüyor musunuz?

ALIŞTIRMALAR

1. Pascal üçgeninde, her satırdaki sayıların toplamı, o satıra ait kümenin, küme parçalarının sayısına eşit midir?

2. Yedi üyesi olan bir yönetim kurulundan, kurulması muhtemel olan iki üyeli, **denetim kurullarının** sayısını, Pascal üçgeninin birler hariç, hangi satırının, hangi içeriği gösterir?

3. Pascal üçgeninde, beşinci satırdaki 10 un, hangi sayıların toplamı olduğunu açıklayınız.

4. Pascal üçgeninde, altıncı satırdaki ikinci 15 in, hangi sayıların toplamı olduğunu açıklayınız.

5. Pascal üçgeninin, yedinci, sekizinci, dokuzuncu ve onuncu satırlarını elde ediniz.

6. Pascal üçgeninin, onuncu satırının sağdan son iki içeriği, birler hariç, hangi sayılardır ?

Uygalamalar :

Pascal üçgeninin her satırındaki sayılar bize, n bir doğal sayı olmak üzere, $(x \mp y)^n$ nin açılımını bulmak için, gerekli katsayıları verir.

$(x + y)^1 = x + y$

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

Yukarıdaki örneklerde, n nin 1, 2, 3 ve 4 değerleri için, $(x + y)^n$ nin açılımlarını görüyorsunuz. Bu açılımların katsayıları ile Pascal üçgeninin, birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü satırındaki sayıların aynı olduğunu da görüyorsunuz.

Örneğin, $(x + y)^3$ ün açılımındaki 1 3 3 1 katsayıları ($x^3 = 1.x^3$ ve $y^3 = 1.y^3$ yazılabilir) ile Pascal üçgeninin, üçüncü satırındaki, (üç elemanlı bir kümenin, alt kümeleri sayı dizisi) sayıları aynıdır.

$(x + y)^5$ in açılımını yapalım :

İlk terim, x^1 tir. Bundan sonraki terim, x in üssü 1 azaltılıp, yanına y çarpanı yazılarak bulunan x^4y dir. Sonra, x in üssü, her defasında 1 eksiltilip, y nin üssü 1 artırılarak işlem sürdürülürse, sıra ile x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5 terimleri elde edilir. Bu terimlerin katsayıları, Pascal üçgeninin beşinci satırına göre :

1 5 10 10 5 1

olacaktır.

Öyleyse, $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10y^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$ olarak bulunur. Bu eşitliğin iki yanında, y yerine (–y) konur ve

$(-y)^2 = y^2$, $(-y)^3 = -y^3$, $(-y)^4 = y^4$, $(-y)^5 = -y^5$

yazılırsa :

$(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

elde edilir.

Buna göre, $n \in D$ için, $(x - y)^n$ nin açılımında; ilk terimin işareti (+), ikinci terimin işareti (—), sonraki terimlerin işaretleri, sıra ile (+), (—),... olarak alınır.

Örneğin, $(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a - 1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$ gibi.

Örnek :

1. $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$

2. $(x - 2)^2 = x^2 - 2\,(x.2) + 4$
$= x^2 - 4x + 4$

3. $(a - 4)^3 = a^3 - 3\,(a^2 . 4) + 3\,(a . 4^2) - 4^3$
$= a^3 - 12a^2 + 48a - 64$

4. $(2x+1)^3 = (2x)^3 + 3\,(2x)^2 . 1 + 3\,(2x) . 1^3 + 1^3$
$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

5. $(x - 3)^4 = x^4 - 4\,(x^3.3) + 6\,(x^2.3^2) - 4\,(x.3^3) + 3^4$
$= x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$

ALIŞTIRMALAR

1. $(a + 2)^2 = ?$
2. $(a - 1)^2 = ?$
3. $(2x - 1)^2 = ?$
4. $(2a + 3)^2 = ?$
5. $(x - y)^4 = ?$
6. $(a + 2)^5 = ?$
7. $(1 - x)^2 = ?$
8. $(2 + y)^4 = ?$
9. $(a - 3)^3 = ?$
10. $(1 - a)^3 = ?$
11. $(3 + x)^3 = ?$
12. $(b - 5)^4 = ?$

2-2. PERMÜTASYON

1. Örnek :

Emine ile Ali, dar bir köprüden arka arkaya geçeceklerdir. Geçiş biçimi : Emine önde ise, Ali arkada; Ali önde ise, Emine arkada olacaktır.

Birinci geçiş : AE

İkinci geçiş : EA

2. Örnek :

Bizden, 8 ve 6 rakamları ile bu rakamları tekrarlamadan (88 biçimindeki sayıların yazılması istenmiyor) iki basamaklı sayıların yazılması istense, 86 ve 68 sayılarını yazabilir miyiz?

3. Örnek :

Bir köy kooperatifinin, yedi kişilik üyelerinin ilk harfleri, K, L, M, N, P, R, S dir. Bu üyeler işlerini yürütmek üzere, L, M ve P den kurulu, üç üyeli bir yönetim kurulu seçiyorlar. Bu üç üye, aralarında; Başkan, Yazman ve Sayman olmak üzere, iş bölümü yapmayı kararlaştırdıklarına göre, bu görevler, bu üç üyeye kaç türlü dağıtılabilir?

Seçim Türleri :	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Başkan :	L	L	M	M	P	P
Yazman :	M	P	L	P	L	M
Sayman :	P	M	P	L	M	L

Yukarıdaki listede, sözü edilen görevlerin, bu üç üyeye, 6 türlü dağıtılabileceğini görüyorsunuz.

Yedi elemanlı bir kümenin, üç elemanlı bir alt kümesi ile burada yapılan seçim türleri arasında, belirgin bir fark vardır. Örneğin; { L, M, P } alt kümesi ile { P, L, M } alt kümesi, birbirinin aynıdır. Çünkü, bizi ilgilendiren konu, kümenin yalnız L, M ve P den ibaret üç elemanıdır.

Oysa, 3. örnekte yaptığımız listedeki her seçim türü sıralanmasında durum farklıdır. Çünkü, görevlerin sırası değişiktir. Örneğin {L, P, M} görev dağıtımında, uylaşım olarak : L Başkan, M yazman, P Sayman iken; { P, L, M } görev dağıtımında ise, başkan P, Yazman L, Sayman M dir.

4. Örnek :

Gazi koşusunda : Ayşe, Bahri, Rahmi, Nermin, birbiri arkasına koşuyorlar.

a) Koşu sıralarından biri, şu biçimde olabilir; Birinci Ayşe, İkinci Bahri, Üçüncü, Nermin, Dördüncü Rahmi. Mümkün olan tüm koşu sıralarının bir listesini yapınız.

b) Listenizde, farklı kaç koşu dizisi var?

a) Uyarı : Koşucuları A, B, N ve R ile gösterelim. Listeyi düzenlemenin yollarından biri, koşuculara A, B, N, R sırasındaki uygun yerleri bulmaya dikkat etmenizdir. Böyle bir listeyi aşağıdaki gibi yapabiliriz.

Koşu sırası :	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
	A B N R	B A N R	N A B R	R A B N
	A B R N	B . . .	N A R B	R . . .
	A N B R	B N A R	N . . .	R . . .
	A N R B	B . . .	N B R A	R . . .
	A R B N	B R A N	N . . .	R . . .
	A R N B	B . . .	N R B A	R . . .

b) Listenizi tamamlarsınız, bu listede, farklı 24 koşu dizisi olduğunu göreceksiniz.

Eşya veya şahısların farklı sıralamaları, permütasyon problemlerini ilgilendirir. A B N R ve N B A R ye A, B, N ve R nin farklı permütasyonları (veya "diziliş"leri) denir.

Tanım : Bir kümenin elemanlarının bir permütasyonu, bu kümenin elemanlarının belli bir sayıya göre dizilişidir.

2–2.1. Permütasyonları Nasıl Sayarız

Permütasyonları saymak için, her zaman onların açık bir listesini yapmamız gerekmez. Verilen eşyaların sayısı büyükse, bu tür listelerin yapımı oldukça zorlaşır. Bu nedenle, permütasyonları saymak için, yeni ve daha kolay bir kurala ihtiyacımız vardır.

5. Örnek :

Portakallı, Muzlu ve elmalı üç tür şeker için istek listemizi belirtmek istiyoruz. (Şekerleri P,M,E ile gösterelim). Birinci, ikinci ve üçüncü isteğimizi belirtmek için muhtemel listemizi sütunlar halinde şu biçimde yapabiliriz :

1. Sütun	2. Sütun	3. Sütun
P M E	M P E	E P M
P E M	M E P	E M P

Birinci sütundaki P ilk isteğimizi, ikinci sütundaki M ilk isteğimizi, üçüncü sütundaki E ilk isteğimizi belirtmektedir. İlk isteğimiz P ise, ikinci isteğimizi seçmek için iki yolumuz vardır. Bu istek M ya da E olacaktır. (Bunu birinci sütunda görmektesiniz). Aynı düşünüş yöntemiyle eğer, ilk isteğimiz M ya da E olsaydı, ikinci isteğimizi seçmek için, yine iki, yol kalırdı.

Bu nedenle, her ilk isteğimiz belli olunca, ikinci isteğin seçilmesi için iki olanak vardır. İlk isteğimizin seçilmesi için 3 yol ve bunun her biri için, birincisini 2 yoldan seçebileceğimize göre, ilk iki isteğimizin toplam seçilme sayısı 3.2 yoldan olabilir. Üçüncü isteğimiz için, yalnız bir seçim yolu kalmaktadır. O halde, üç isteğimiz için toplam seçim sayısı :

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ dır.

Bu sorunun çözümünü düşünmenin başka bir yolu da üç isteğimizin herbirini belirten üç kutu kullanmaktır.

3	2	1

İlk isteğimiz için, üç seçme olanağı vardır. Bunu, ilk kutuya 3 sayısını yazmakla belirtmiş olabiliriz. Bu ilk isteğimiz belirtildikten sonra, ikinci isteğimiz için, yalnız iki seçim olanağımız vardır. Bunu, ikinci kutuya 2 sayısını yazmakla belirtebiliriz. Böylece, birinci ve ikinci isteğimizi seçtiğimiz için, üçüncü isteğimiz için bir seçim yolu kalıyor. Bunu da, üçüncü kutuya 1 sayısını yazmakla belirtmiş oluruz. O halde, isteklerimizin toplam sayısı $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ olur. Burada da görüyorsunuz ki, herbir ilk seçime karşılık, ikincisinden iki seçme durumu vardır.

Yukarıda, 4. örnekte verdiğimiz A, B, N ve R koşu sırasındaki muhtemel dizilişleri, kutulara paylaştırmak yöntemiyle inceleyelim : Bu kez kutumuz dört bölmeli olsun.

4	3	2	1

İlk sıradaki koşucuyu, koşan dört koşucudan herhangi biri olarak alabilir miyiz? Bunu, yukarıdaki kutunun birinci bölmesine 4 sayısını yazarak belirtebilir miyiz? Birinci koşucular tesbit edildikten sonra, geriye kalan 3 koşucudan birini, ikinci durumdaki koşucu olarak seçebilir miyiz? Herhangi bir özel tercih yapmaksızın, seçilen ilk iki sıradaki koşuculara göre, üçüncü sıradaki koşanlar için, iki seçme olanağı var mıdır? İlk üç koşucunun sırası belli olduktan sonra, koşudaki dördüncü sıra için yalnız bir seçme olanağı kalır mı? Öyleyse, sıralı koşunun olabilir toplam sayısı $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ tür. Daha önce A B N R nin, koşu sıralama listesindeki size bırakılan boş yerleri doldurmuş iseniz buradaki sıralanışın 24 olduğunu görörsünüz.

Sonuçlar :

a) Yukarıdaki 1. ve 2. örneklerde, iki elemanlı bir kümenin, permütasyonlarının sayısını bulduk. Bu sayı P(2,2) sembolü kullanılarak $P(2,2) = 2.1 = 2$ olarak yazılır.

b) Yukarıdaki 3. ve 5. örneklerde, üç elemanlı bir kümenin, 3 lü permütasyonlarının sayısını 6 olarak bulmuştuk. Bu sayı, $P(3,3) = 3.2.1 = 6$ biçiminde gösterilir.

c) 4. örnekte ise, dört elemanlı bir kümenin, 4 lü permütasyonlarının sayısını 24 tane bulmuştuk. Bu sayı da $P(4,4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ biçiminde gösterilir. Bu sayı, 1 den 4 e değin ardışık sayma sayılarının çarpımıdır.

Benzer biçimde, P (5,5) = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 permütasyon sayısı da 1 den 5 e değin olan ardışlık sayma sayılarının çarpımıdır.

Matematikte : Çokça görüldüğü için, bunu özel bir sembolle gösteririz. 5 ! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 biçiminde yazılı bir sayıyı, **5 "beş faktöriyel (çarpansal)"** diye okuyacağız.

Benzer biçimde, "altı faktöriyel" 6 ! = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 olup; 1 den 6 ya değin sayma sayılarının çarpımı anlamındadır.

Genel olarak, n bir sayma sayısı olmak üzere, her defasında n dizilişi olan, n farklı şeyin permütasyonları sayısı, n faktöriyel (çarpansal) olup, P (n,n) = n ! sembolü ile gösterilir. n faktöriyel, 1 den n ye değin ardışık tüm sayma sayılarının çarpımı anlamına kullanılır. Buna göre;

$$n ! = n (n - 1) (n - 2) \ldots 3.2.1 \text{ ya da;}$$
$$P (n,n) = n (n - 1) (n - 2) \ldots 3.2.1 \text{ dir.}$$

Ayrıca, aşağıdaki biçimleri de doğrudur.

$$5! = 1.2.3.4.5$$
$$6! = 1.2.3.4.5.6$$
$$n! = 1.2.3. \ldots (n - 1) n$$

Bu yazılış biçimi, çalışmalarımızda size kolaylık sağlayabilir. Fakat, genellikle uygulanan yazılış biçimi şöyledir :

$$1! = 1 = 1$$
$$2! = 2.1 = 2$$
$$3! = 3.2.1 = 6$$
$$4! = 4.3.2.1 = 24$$
$$5! = 5.4.3.2.1 = 120$$
$$6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$
$$7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040$$

Not : 0! = 1 olarak tanımlanır.

Burada, n büyüdükçe, n faktörüyel'in de hızla büyüdüğünü görüyorsunuz. Bu nedenle, ünlem işareti en uygun bir semboldür. Hatta bazı matematikçiler, n! için, "n hayret" ! diye ifade etmişlerdir.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdakileri çarpan biçiminde gösteriniz.

a) 8! b) 9! c) 10! d) 13!

2. 5! = 5.4.3.2.1 = 5 (4!) olduğunu görünüz. Benzer biçimde aşağıdakileri ikinci bir faktöriyel türünden yazınız.

a) 12! b) 8! c) 9! d) 15!

3. 10! = 10.9 (8!) olduğunu. herhangi bir çarpma işlemine girişmeden gösteriniz.

4. Bir yarış kayığında, 6 oturma yeri arka arkaya dizilmiştir. 6 kürekçi, bu yerlere kaç değişik biçimde oturabilir? (Cevap : 720).

5. **"KEMAL"** sözcüğündeki harflerin permütasyonları kaç tanedir? (Cevap : 120)

6. Bir doğru üzerindeki K, L, M, N noktalarının permütasyonları kaç tanedir? (Cevap : 24).

7. 0, 4, 6, 8 rakamlarını kullanarak, her sayıda bir rakam bir kez yazılmak koşulu ile kaç tane dört basamaklı sayı yazılabilir? (Cevap : 18)

8. 0,3,5,7,9 rakamlarını kullanarak, her sayıda bir rakam bir kez yazılmak koşulu ile kaç tane beş basamaklı sayı yazılabilir? (Cevap : 96)

Çözüm :

7. 0,4,6,8 rakamları ile istenilen koşulda 4 basamaklı :

P (4,4) = 4! = 4.3.2.1 = 24 tane sayı yazılabilir.

Ancak, bu permütasyonlardan, 0 (sıfır) ile başlayanlar dört basamaklı sayılar değildir. (0 4 6 8 vb.) Bu nedenle, bulunan permütasyonların sayısından, sıfır ile başlayan permütasyonların sayısını çıkarmak gerekir. Bu permütasyonlar, { 4,6,8 } kümesinin, 3—lü permütasyonlarının sol başlarına 0 (sıfır) yazılarak bulunur. O halde, 0 ile başlayan permütasyonların sayısı : P (3,3) = 3! = 3.2.1 = 6 dır.

Buradan, istenilen sayılar :

4! — 3! = 24-6 = 18 tanedir.

2-2.2. Genel Çarpma Özeliği

1. Örnek :

Bir sınıfta, her sırada 2 öğrenci oturmak üzere, 22 sıra olduğunu düşünelim. Sınıftaki öğrencilerin sayısını $2.22 = 44$ olarak buluruz.

2. Örnek :

Bir öğrenci, karışık iki dondurmanın birincisini { sütlü, çilekli, kavunlu } dondurma kümesinden; ikincisini { Vişneli, fıstıklı } dondurma kümesinden seçmek istiyor. Seçimi kaç değişik biçimde yapabilir?

Bu öğrenci, birinci seçimi üç elemanlı bir kümeden 3 yoldan, ikinci seçimi iki elemanlı bir kümeden 2 yoldan yapabileceği için, dondurmalarını $3.2 = 6$ biçiminde seçebilir.

3. Örnek :

Bir erkek öğrencinin, 7 gömleği ve 3 pantolonu var. Pantolonları, birer gömlek ile takım yapmak istese, kaç değişik takım yapabilir?

Bu öğrenci, her pantolona eşleyeceği gömleği, her defasında 7 değişik biçimde seçebilir. Bu nedenle, yapabileceği takım sayısı $7.3 = 21$ dir.

Seçme ve permütasyonlar hakkındaki düşüncelerimizi sonuçlandırırken, çoğu kez, aşağıdaki özelikten yararlandık.

Genel Çarpma Özeliği : Eğer, bir işlem a yoldan yapılabiliyorsa ve bu yollardan herhangi biri kullandıktan sonra, ikinci işlem b yoldan yapılabiliyorsa, iki ardışık işlem a.b yoldan yapılabilir.

4. Örnek :

Bir plaka üzerinde, alfabemizdeki bir harf ile { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 } kümesinin elemanlarını kullanarak, onlar basamağı sıfır olmayan iki basamaklı bir sayı yazılıyor. Kaç tane plaka hazırlanabilir?

Bu soruyu, bölmeli kutu uygulaması yöntemiyle çözelim.

29	6	7

Alfabemizde, 29 harf olduğu için, bu plakanın harf yeri 29 biçimde doldurulabilir. Plakanın ikinci yeri ise, sıfır kullanılmadığından { 1, 2,3,4,5,6 } kümesinin elemanları ile 6 biçimde ve plakanın üçüncü

yeri ise, { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 } kümesinin elemanlarının hepsi kullanıldığı için, 7 biçimde doldurulabilir. Böylece, birbirinden farklı; $29.6.7 = 1218$ plaka hazırlanabilir. Burada, ardışık, üç ayrı işlem için, çarpma özeliğini kullandık.

5. Örnek :

Bir arabanın plakası, alfabemizdeki 29 harften ikisi ve yüzler basamağı sıfır olmayan üç basamaklı sayılardan meydana gelmiştir. (Plaka üzerindeki il numaralarını belirten sayılar hariç, Örneğin, 33 DZ 864 nolu plakadaki 33 gibi). Harfler, onlar ve birer basamağındaki rakamlar tekrarlanabilir. Buna göre, kaç değişik plaka elde edilebilir?

Çözüm :

Bölmeli kutu uygulaması yöntemine gre :

29	29	9	10	10

$\Rightarrow 29.29.9.10.10 = 756900$

plaka elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

1. 9 büyük ve 5 küçük işçi arasından, bir işte çalıştırılmak üzere, 1 büyük ve 1 küçük işçi kaç türlü seçilebilir?

2. 18 koyun ve 9 keçisinden, 1 koyun ve 1 keçiyi satmak isteyen bir çoban, satışı kaç değişik biçimde yapabilir. (Cevap : 162)

3. Bir etiket üzerine, alfabemizdeki bir harf ile { 0,1,2,3,4,5,6,7,8 } kümesinin elemanlarını kullanarak, onlar basamağı sıfır olmayan iki basamaklı bir sayı yazılıyor. Kaç farklı etiket hazırlanabilir? (Cevap : 2088)

4. Büyük bir kentte, H. M, B geçitleri var. H den M ye 5 yol, M den B ye 4 yol olduğuna göre; bir taksi şoförü, her gidişinde M den geçerek, H den B ye kaç değişik biçimde gidebilir? 20

5. **"ÖYLEKİ"** sözcüğünün harflerini kullanarak, kaç tane **(ünlü harf, ünsüz harf)** sıralı ikilisi oluşturabilirsiniz?

Yol gösterme : Ünlü harflerin kümesi { Ö, E, İ }, ünsüz harflerin kümesi { Y,L,K } olduğuna göre (Ö,Y) gibi sıralı ikililerden kaç tane yazılabileceğini düşününüz.

2-2.3 Permütasyonunun Genel Bir Formülü

1. Örnek :

Bir odada, 10 sandalye bir sıraya dizilmiştir. Bu odaya giren üç insan, bu sıraya kaç değişik biçimde oturabilir?

Çözüm :

Bu odaya giren 3 insandan birincisi için, 10 yer seçme olanağı vardır. Birinci insan oturduktan sonra, ikinci insan için 9 seçme olanağı bulunur. İlk iki insan oturduktan sonra, üçüncü insan için 8 seçme olanağı kalır.

10	9	8

Bu üç işlem, arka arkaya yapıldığı için, çarpma özelliğine göre, toplam permütasyonların sayısı :

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 \text{ dir.}$$

Bu örnekte, her defasında 3 dizilişi olan, 10 farklı şeyin permütasyonlarının sayısını bulduk. Bu sayı için, P (10,3) sembolünü kullanacağız. Öyleyse, P (10,3) = 10.9.8 = 720 olur.

Genel olarak, bir kümenin elemanları sayısı n ve diziliş sırası r ise, bu n elemanın r-li permütasyonlarının sayısı P (n, r) biçiminde gösterilir. Burada, n ve r bir sayma sayısı olduğu için, $r \leqslant n$ olduğu zaman P (n, r) bir anlam taşır.

Yukarıdaki örnekte izlediğimiz yoldan bir yargı ile her defasında r tanesi alınan n elemanın permütasyonlarının sayısı için, genel bir formül bulabiliriz. İlk tercih için, n seçme olanağı vardır. Böylece, geriye (n — 1) şey kaldığından, ikinci tercih için, (n — 1) ve üçüncü tercih için, (n — 2) seçme olanağı bulunur. Her bir elemanın, bir permütasyonda kullanılabilmesi için, bu yöntemle r adım ileri gidilmektedir. Bu biçimle yazılacak çarpanların sayısı, r tane olacaktır. Bu nedenle :

$$P(n.r) = \underbrace{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)}_{\text{r tane ardışık çarpan}} \text{ olur. Burada, } r \leqslant n \text{ dir.}$$

Örneğin, $P(6,2) = \underbrace{6.5}_{\text{2 çarpan}}$ tir burada, $n = 6$ ve $r = 2$ dir.

$P(7,4) = \underbrace{7.6.5.4}_{\text{4 çarpan}}$ tür. Burada, $n = 7$ ve $r = 4$ tür.

$P(27,5) = \underbrace{27.26.25.24.23}_{\text{5 çarpan}}$ tür. $n = 27$ ve $r = 5$ tir.

2. Örnek :

Bir konferansta 6 ülkenin temsilcileri, yuvarlak bir masa etrafında kaç değişik biçimde oturabilirler?

Çözüm :

Bir temsilci, masa etrafında her hangi bir yere oturduktan sonra; geri kalan 5 temsilci :

$5! = 5.4.3.2.1 = 120$ değişik biçimde masa etrafında oturabilirler.

Genel olarak, bir kümenin n elemanı, bir çember dolayında;

$(n-1)! = (n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots 3.2.1$ değişik biçimde dizilebilir.

ALIŞTIRMALAR

1. P (19.6) nın çarpanlarını yazınız. (Fakat çarpmayınız).
2. P (45,7) nin çarpanlarını yazınız. (Fakat çarpmayınız).
3. P (n,r) sembolünü kullanarak 39, 38, 37, 36, 35, 34, 33, 32, 31, 30 çarpımını yazınız.
4. P (12,3) ile (9!) in çarpanlarının açılımını yazınız. (Fakat çarpmayınız). Bu çarpım, 12! e eşit olur mu?
5. P (14,6) . (8!) = P (14,14) olur mu? Neden?
6. Aşağıdakilerin değerlerini hesaplayınız.

a) $\frac{9!}{5!} = ?$ b) $\frac{6!}{8!} = ?$

c) $\frac{8!\,.\,3!}{6!} = ?$ d) $\frac{(3.4)!}{4.5!\,.\,8!} = ?$

7. 7! sayısı, hangi sayı ile çarpılırsa :

a) 8! olur? b) 9! olur? c) 10! olur? d) 12! olur?

Çözüm :

b) **1. yol : Sayı x olsun.** $7! \cdot x = 9!$ eşitliği yazılabilir.

$$7! \cdot x = 9! \Leftrightarrow x = \frac{9!}{7!} = \frac{7!\,8.9}{7!} = 8.9 = 72 \text{ bulunur.}$$

11. Yol : $7! \cdot P(9,2) = 7! \cdot 8.9 = 1.2.3.4.5.6.7.8.9$
$= P(9,9) = 9!$ olur.

8. Aşağıdaki eşitliklerde x i bulunuz.

a) $4! \cdot x = 6!$ b) $7! \cdot x = 5!$ c) $6 \cdot x = 6!$

9. Ayşe'nin, 4 ciltlik bir resim dergisi ile 5 ciltlik bir romanı vardır. Bunları, dergi ciltleri birbirinden ve roman ciltleri de birbirinden ayrılmamak koşulu ile kitaplığının bir rafına kaç değişik biçimde sıralayabilir? (Cevap : 5760)

Yol gösterme : Dergi ve roman ciltlerinin, kendi aralarında dizildikten sonra, bu iki takımın da kendi aralarında (2!) biçiminde dizileceğini düşününüz ve çarpma özeliğinden yararlanınız.

10. $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ kümesi veriliyor. Yazılacak her sayıda bir eleman bir kez kullanılmak koşulu ile :

a) Kaç tane 2 basamaklı sayı yazılabilir?

b) Kaç tane 3 basamaklı sayı yazılabilir? (Cevap : 336).

c) Kaç tane 4 basamaklı sayı yazılabilir?

d) Kaç tane 5 basamaklı sayı yazılabilir? (Cevap : 6720).

11. "YASEMİN" kelimesinin harfleri ile her kelimede herhangi bir harf bir kez kullanılmak üzere, "İN" ile başlayan 7 harfli anlamlı ya da anlamsız kaç kelime yazılabilir? (Cevap : 120).

Yol gösterme : Her kelime (anlamlı ya da anlamsız) "İN" ile başlayacağına göre, "YASEMİN" kelimesinin geriye kalan beş harfinin (Y,A,S,E,M) kaç biçiminde sıralanabileceğini düşününüz.

12. 2,3,4,5,6,7 rakamları ile sonu 23 ile biten kaç tane altı basamaklı sayı yazılabilir? (Yazılan her sayıda, bir rakam bir kez alınabilir).

Yol gösterme : Yazılacak her altı basamaklı sayının, sonunun 23 ile bitmesi (456723 gibi) için; 2,3,4,5,6,7 rakamlarından 2 ve 3 alındıktan sonra geriye kalan 4,5,6,7 sayıları ile elde edilecek dört basamaklı sayıları düşününüz.

13. On iki öğrencinin katıldığı bir yarışmada, her katılana birden fazla ödül verilmemek koşuluyla birinci ve ikinci ödüller kaç değişik biçimde dağıtılabilir? (Cevap : 132). $P(12;2) = 12.11 = 132$

14. Bir bölgedeki, dört ilimizin bir haritası, her il farklı bir renkte olmak üzere boyanacaktır. Altı çeşit boya olduğuna göre, bu harita kaç değişik biçimde boyanabilir? (Cevap : 360)

15. A, B, C, D, E noktaları, bir çember üzerine kaç değişik biçimde yazılabilir? (Cevap : 24).

2–3. KOMBİNASYON

Bu bölümde, n elemanlı bir kümenin, 1 elemanlı, 2 elemanlı, 3 elemanlı..., r elemanlı kaç alt kümesi olduğunu ve bu alt küme sayıları iler permütasyon arasındaki bağıntıyı inceleyiniz.

Tanım : n elemanlı bir kümenin, r elemanlı bir alt kümesine, bu kümenin r–li bir **kombinasyonu** denir.

Burada, n sayma sayısı, r de, n den büyük olmayan herhangi bir doğal sayıdır. Bir kümenin, r–li tüm kombinasyonlarının sayısını, K (n,r) sembolü ile göstereceğiz.

Uyarı : n elemanının, r–li kombinasyonları için, C (n,r) veya $\binom{n}{r}$ sembolleri de kullanılır.

Örnek :

$E = \{P, R, S, T\}$ kümesi verilmiş olsun, Tanıma göre : $\{P\}$ ve $\{R\}$ kümelerinden her biri, E nin 1–li bir kombinasyonu; $\{P,R\}$ kümesi, E nin 2–li bir kombinasyonu; $\{P,R,S\}$ kümesi, E nin 3–lü bir kombinasyonu ve $\{P, R, S, T\}$ kümesi, E nin 4–lü bir kombinasyonudur.

Burada, E kümesinin birer elemanlı alt kümeleri $\{P\}$, $\{R\}$, $\{S\}$, $\{T\}$ dir. O halde, E nin 1–li kombinasyonları sayısı $K(4,1) = 4$ tür.

E kümesinin elemanlarının, 2–li permütasyonlarını oluşturalım :

PR	PS	PT	RS	RT	ST
RP	SP	TP	SR	TR	TS

Bir kümenin elemanlarının sırası değiştiğinde, küme değişmeyeceğinden, $\{P,R\} = \{R,P\}$ gibi, r–li kombinasyon, r–li permütasyondan farklıdır.

Bu nedenle, yukarıda yazdığımız 2-li permütasyonlardan E kümesinin;

PR PS PT RS RT ST

kombinasyonlarını buluruz. Buna göre, E kümesinin iki elemanlı her alt kümesinde, 2! tane 2–li permütasyon elde edildiğini görüyorsunuz.

O halde :

$2! \cdot K(4,2) = P(4,2)$ bağıntısı yazılabilir. Buradan,

$$K(4,2) = \left(\frac{P(4,2)}{2!}\right) \text{ bulunur.}$$

Bu kez de, E kümesinin elemanlarının 3–lü,

PRS	PRT	PST	RST
PSR	PTR	PTS	RTS
RPS	RPT	SPT	SRT
RSP	RTP	STP	STR
SPR	TPR	TPS	TRS
SRP	TRP	TSP	TSR

permütasyonlarını meydana getirelim. Bunlardan, bu kümenin 3–lü $\{P, R, S\}, \{P, R, T\}, \{P, S, T\}, \{R, S, T\}$ kombinasyonlarını buluruz. O halde, E kümesinin 3 elemanlı her alt kümesinde 3! tane 3–lü permütasyon elde edilmektedir. Öyleyse,

$3! \cdot K(4,3) = P(4,3)$ eşitliği yazılıp, buradan;

$$K(4,3) = \frac{P(4,3)}{3!} \text{ bulunur.}$$

E kümesinin, tüm permütasyonları sayısının 4! olduğu bizce bilinmektedir. Bunlardan E kümesinin 4–lü $\{P, R, S, T\}$ kombinasyonunu buluruz. Buradan da :

$4! \cdot K(4,4) = P(4,4)$ eşitliğinden,

$$K(4,4) = \frac{P(4,4)}{4!} \text{ elde edilir.}$$

Genel olarak, n elemanlı bir kümenin, r-li ($r \leqslant n$) kombinasyonları sayısı :

$$K(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \text{ dir.}$$

Örnekler :

a) 1. Yol : $K(10,3) = \dfrac{P(10,3)}{3!} = \dfrac{10.9.8}{3.2.1} = 120$

2. Yol : $K(10,3) = \dfrac{10!}{3!\,(10-3)!} = \dfrac{10!}{3!\,.\,7!}$

$$= \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{3.2.1.7.6.5.4.3.2.1}$$

$$= 120$$

b) $4! \cdot K(8,4) = 4! \cdot \dfrac{P(8,9)}{4!} = P(8,4) = 8.7.6.5 = 1680$

c) $\dfrac{K(9,5)}{3!} = \dfrac{\dfrac{P(9,5)}{5!}}{3!} = \dfrac{P(9,5)}{5!\,.\,3!}$

$$= \frac{9.8.7.6.5}{5.4.3.2.1.3.2.1} = 21$$

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdakilerin değerlerini bulunuz.

a) $K(10,4)$ b) $K(8,3)$ c) $K(6,4)$ d) $K(9,6)$

e) $3! \cdot K(5,3) = ?$ f) $3! \cdot K(8,5) = ?$ g) $\dfrac{K(12,5)}{4!} = ?$

2) $K(6,3) = K(5,2) + K(5,3)$ olduğunu gösteriniz.

$K(5,2) + K(5,3)$ toplamı için, bulduğunuz 20 sayısı, Pascal üçgeninin hangi satırının birler hariç, kaçıncı içeriğidir?

Bu, 20 sayısı, pascal üçgeninin altıncı satırının birler hariç sağdan ve soldan üçüncü içeriği midir?

Kombinasyonunun bu özeliğinden yararlanarak, Pascal üçgeninin her satırındaki birler hariç, her içeriğinin değeri bulunabilir.

1. Örnek :

Pascal üçgeninin, 10. Satırının sağdan ve soldan 4. içeriği (1 ler hariç) :

$$K(9,3) + K(9,4) = \frac{P(9,3)}{3!} + \frac{P(9,4)}{4!} = \frac{9.8.7}{3.2.1} + \frac{9.8.7.6}{4.3.2.1}$$

$$= 84 + 126 = 210 \text{ dur.}$$

2. Örnek :

Pascal üçgeninin, 21. satırının sağdan ve soldan 5. içeriği (1 ler hariç) :

$$K(20,4) + K(20,5) = \frac{P(20,4)}{4!} + \frac{P(20,5)}{5!}$$

$$= \frac{20.19.18.17}{4.3.2.1} + \frac{20.19.18.17.16}{5.4.3.2.1}$$

$$= 4845 + 15504 = 20349 \text{ dur.}$$

3. Örnek :

Pascal üçgeninin, 100 üncü satırının sağdan ve soldan 3. içeriği (1 ler hariç) :

$$K(99,2) + K(99,3 = \frac{P(99,2)}{2!} + \frac{P(99,3)}{3!} = \frac{99.98}{2} + \frac{99.98.97}{3.2.1}$$

$$= 4851 + 156849 = 161700 \text{ dür.}$$

3. Pascal üçgeninin, 1 ler hariç sağdan ve soldan :

a) 7. satırının, 3. içeriğini bulunuz.

b) 12. satırının, 5. içeriğini bulunuz.

c) 20. satırının, 4. içeriğini bulunuz.

d) 50. satırının, 3. içeriğini bulunuz.

4. $K(10,10) = 1$ dir. Niçin?

5. $A = \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$ kümesi veriliyor. Bu kümenin

a) İki elemanlı alt kümelerinin sayısını bulunuz.

b) Üç elemanlı alt kümelerinin sayısını bulunuz.

c) Dört elemanlı alt kümelerinin sayısını bulunuz.

d) Beş elemanlı alt kümelerinin sayısını bulunuz.

e) Yedi elemanlı alt kümelerinin sayısını bulunuz.

6. 9 insan, 4 koltuğa, oturuş sırası gözetmeksizin kaç değişik biçiminde oturabilir? (Cevap : 126).

7. 13 üye arasından, üç üyeli kaç farklı kurul seçilebilir? (Cevap : 286).

8. Bir makineyi çalıştırmak üzere, 15 kişi arsından, aynı zamanda 4 eleman seçilecektir. Farklı kaç çalıştırıcı grubu meydana getirilebilir? (Cevap : 1365).

9. Bir okulda, 12 basketbolcu arasında, 5 kişilik bir oyun ekibi kaç türlü kurulabilir? (Cevap : 792).

10. Bir öğrenciye, bir sınavda, 23 sorudan ilk 3 soruyu cevaplandırması şartı ile 20 soruya cevap vermesi istenmektedir. Cevaplandıracağı soruları kaç türlü seçebilir. (Cevap : 1140)

Yol gösterme : Bu öğrencinin, ilk üç soruyu cevaplandırmak zorunluğu olduğundan, geriye kalan $20 - 3 = 17$ tanesini; $23 - 3 = 20$ soru içinden seçeceğini düşününüz.

11. Bir düzlem üzerinde, herhangi üçü doğrusal olmayan K, L, M, N, P, R noktaları veriliyor.

a) Bu noktalar kaç doğru belirtir. (Cevap : 15)

b) P ve R den geçmeyen kaç doğru vardır? (Cevap : 6)

c) Köşeleri bu noktalarda bulunan kaç tane üçgen meydana getirilebilir? (Cevap : 20).

d) Bir köşesi K olan kaç üçgen vardır? (Cevap : 10).

Yol gösterme :

a) Farklı iki noktanın bir doğru belirttiğini düşününüz.

b) P, R den geçmeyen ve PR den farklı doğruları düşününüz.

c) Doğrusal olmayan üç noktanın bir üçgen belirttiğini düşününüz.

d) Bir köşesi K olan üçgenlerin, { L, M, N, P, R } kümesinin 2–li kombinasyonlarına, K nin katılması ile elde edileceğini düşününüz.

12. Türkiye birinci küme futbol karşılaşmaları, 16 takım arasında, her takımın diğer takımlardan her biri ile 2 kez karşılaşması ile yapılmaktadır. Bu takımlar arasında, bir yıl boyunca, kaç futbol karşılaşması yapılır? (Cevap : 480).

Yol gösterme :

16 takımın, birer kez karşılaşma sayısını düşününüz ve çarpma kuralından yararlanınız.

13. 4 ü erkek, 2 si kız olmak üzere, 6 kişilik bir veleybol takımı için; 8 i erkek, 6 sı kız oyuncu adayı arasından, aşağıdaki koşullara uygun olarak bu takım kaç biçimde oluşturulabilir?

a) Hiç bir şart koşulmuyor.

b) Alınacak erkek oyuncuların 2 si bellidir.

Açıklama :

a) için, K (8,4) . K (6,2); b) için, K (6,2) . K.(6,2) olacağını düşününüz.

14. Bir iş yerinde, 10 erkek ve 4 kadın işçi vardır.

a) Bu işçilerden, 6 kişilik bir çalışma grubu kaç biçimde seçilebilir? (Cevap : 3003)

b) Bu gruplardan, kaç tanesinde en az bir kadın işçi vardır? (Cevap : 2793).

c) Bu gruplardan, kaç tanesinde yalnız bir kadın işçi vardır? (Cevap : 1008).

Açıklama :

a) $10 + 4 = 14$ işçi arasında, 6 lık gruplar : K (14,6) biçiminde seçilebilir.

b) Tamamı erkek olan gruplar : K (10,6) dır.

c) Bu gruplardaki, 6 işçiden yalnız birinin kadın olması halindeki grup sayısı : K (10,5) . K (4,1) dir.

Bu açıklamalara göre, sonuçları bulunuz.

15. 9 işçi ile biri 4 kişilik, diğeri 3 kişilik iki çalışma grubunu kaç değişik biçimde kurabiliriz? (Cevap : 1260).

16. 8 koyunu, 5 keçisi ve 4 ineği olan bir köylü; 4 koyun, 3 keçi ve 2 ineğini satmak istiyor. Köylü, bu satışı kaç değişik biçimde yapabilir? (Cevap : 4200).

2–4. OLASILIK

"Bugün, kar yağma ihtimali var". "B takımının, C takımını yenmesi ihtimali fazla". "Bu yıl hububat ürününün, geçen yıllara göre, daha fazla olma ihtimali var" vb. biçimindeki ifadeleri, sık sık duyarsınız. Bu ifadelerin her birinde, sonucundan kesinlikle emin olmadığımız bir durum anlatılmaktadır.

İşte, bu ve benzeri türden anlatımlar, matematiğin **"Olasılık Kuralı"** adı verilen dalında incelenir.

Şans oyunları, olasılık için en iyi örneklerdir. Çağımızda, olasılık hesaplarının önemi büyüktür. Örneğin, bir meteoroloji uzmanı havanın geleceği hakkında bir hava tahmini yapar. Hükümet ve Belediyeler bütçelerini yaparken olasılık hesaplarını kullanırlar. Milli Güvenlik, İstatistik, Tarım, Ticaret, Teknoloji ve daha birçok alanlarda olasılık hesaplarından yararlanılır.

2–4.1 Olasılığın Hesaplanması

Bu kesimde, şans olaylarını açıklayıcı nitelikte olan önermeler hakkındaki bazı kavramlar üzerinde duracağız.

1. Örnek :

Bir madeni paranın, yazı ve tura (resimli yüzü) olmak üzere iki yüzü olduğunu biliyorsunuz. Bir madeni para havaya atılır ve serbest düşmeye bırakılırsa, yazı ya da tura geldiği görülür. Bu deneyde, atılan paranın tam bir dengeye sahip olduğunu yani, her iki yüzünün ağırlıkça aynı olduğunu farzediyoruz. Böyle bir paraya, **"hilesiz para"** denir. Hilesiz bir paranın, bir tura ya da yazı yüzünün üste gelmesi,

olasılık hesabında bir olaydır. Olasılık hesabında, bir olayın oluşunu belirten şans ölçüsü için bir sayı kullanmak gerekir.

Bir madeni parayı, havaya atmakla yazı ya da tura gelmesi, deneyin sonucunun kesin olmadığını gösterir. Deney sonucunda elde edilebilecek sonuçlara **çıkanlar** diyelim. Yazı çıkmasını Y, tura çıkmasını da T ile gösterelim. Muhtemel tüm çıkarların kümesi $\{Y, T\}$ dir. Bu kümeye, bu deneye ait evrensel küme diyeceğiz ve E ile göstereceğiz, E nin bir küme parçası $\{Y\}$, başka parçası da $\{T\}$ dir.

Tanım : Bir deney de, elde edilmesi olası tüm çıkanların kümesine evrensel küme, evrensel kümenin her alt kümesine de olay denir.

Para atma deneyinde yazı gelmişse, bu çıkan, muhtemel iki çıkanın şanslısı olup, bunun şans ölçüsünü $\frac{1}{2}$ ile göstereceğiz. Bir olay bir şansa bağlı ise, meydana gelişinin belli bir olasılığı vardır. Bu deneyde, yazı gelmesi olayını "A" ile gösterirsek, A olayının olasılığına $\frac{1}{2}$ diyebiliriz. Bu söylediğimiz ile meydana gelen olayın şans ölçüsünün $\frac{1}{2}$ olması aynı anlamdadır. $A = \{Y\}$ olacağından, A olayının olasılığını;

$$0(A) = \frac{1}{2}$$

biçiminde göstereceğiz.

Para atıldığında tura gelirse ve bu olayı da "B" ile gösterirsek, B olayının olasılığını gözönüne alacağız demektir. O zaman $B = \{T\}$ olacağından, bu olasılığı 0 (B) ile gösterebiliriz.

Buna göre;

$$0(B) = \frac{1}{2}$$

olur. Bu olayların sonuçlarına göre, $0(A) = 0(B)$ eşitliğini yazabiliriz.

Bir deneydeki olayların her birinin olasılığı aynı ise, bu tür olaylara eş olumlu olaylar denir.

Hilesiz bir paranın dört kez atıldığını, her defasında yazı geldiğini farzedelim. Onu izleyen atışta, bir tura gelmesinin olasılığı nedir? Sorusuna cevabımız; beşinci de yazı gelse, paranın diğer herbir atılışının olasılığı için $\frac{1}{2}$ ihtimali kalır olacaktır. Çünkü; birinci atılışta yazı gelmişse, ikinci atılışta mutlaka tura gelebileceğini, olasılık hesabı yönünden söyleyemeyiz.

2. Örnek :

Bir madeni parayı, arka arkaya iki kez havaya atalım, Çıkanların tümü 4 tane olup, bunların listesi şunlardır :

Birinci atılış	İkinci atılış
Tura	Tura
Tura	Yazı
Yazı	Tura
Yazı	Yazı

Bu deneyin evrensel kümesi,

$E = \{(T, T), (T, Y), (Y, T), (Y, Y)\}$ dir.

Bu küme, dört elemanlıdır. Bunun iki alt kümesi $C = \{(T, Y), (Y, T)\}$ ve $D = \{(T, T)\}$ olsun. Bu iki alt küme birer olaydır. C kümesi, deneyde çıkanların ikisinde bir tura, bir yazı gelmesi olayını anlatır. Bu iki çıkan, dört çıkan arasında en çok arzu edilendir. Bu, C olayının meydana gelme olasılığı;

$$0(C) = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

D kümesi, atılan her iki paranın tura gelmesi olayını anlatır. Bu, D olayının meydana gelme olasılığı da;

$$0(D) = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

Bu deneydeki, C ve D olaylarının eşit görünüşlü olmadığını görüyorsunuz. Yani olasılıkları farklıdır. Çünkü, $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}$ tür.

3. Örnek :

Sınıf öğretmeniniz, birinci kanaat notları çok yüksek olan Kemal, Savaş ve Barış'tan birine bir kitap hediye etmek istiyor. Bu öğrencilerin adlarını aynı büyüklükteki üç fişe yazıp, bir torbaya koyuyor. Fişler karıştırıldıktan sonra, torbadan bir fiş gelişigüzel çekilse, Barış'a ait fişin çıkma olasılığı nedir? Cevabımız $\frac{1}{3}$ olacaktır. Kemal ve Savaş'a ait fişlerin çıkma olasılıkları sorulsaydı, cevabımız onların her biri için de $\frac{1}{3}$ olurdu.

Bu deneyde, her öğrenciye ait fişin çıkma olayı, birer elemanlı bir kümedir. Bu kümeler : $K = \{k\}$, $S = \{s\}$ ve $B = \{b\}$ olsun. O halde, **evrensel küme :**

$$E = \{k, s, b\} \text{ olur.}$$

4. Örnek :

Bir torbada, aynı büyüklükte, 2 mor, 3 turuncu 4 yeşil bilye var. Bunların toplamı $2 + 3 + 4 = 9$ dur. Torbadan gelişigüzel bir bilye çekilirse, bunun yeşil bilye olma olasılığı $\frac{4}{9}$ dur. Ayrıca, turuncu bilye olma olasılığı $\frac{3}{9}$ ve mor bilye olma olasılığı da $\frac{2}{9}$ olur.

Bu denemede, mor bilye çıkma olayı : $M = \{m_1, m_2\}$; tuuncu bilye çıkma olayı : $T = \{t_1, t_2, t_3\}$; yeşil bilye çıkma olayı da $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ile gösterilirse, evrensel küme :

$$E = \{m_1, m_2, t_1, t_2, t_3, y_1, y_2, y_3, y_4\} \text{ olur.}$$

E kümesinin, eleman sayısının, torbadaki bilye sayıları toplamı olan 9 a eşit olduğuna dikkat ediniz.

M, T, Y olaylarının olasılıkları :

$$0(M) = \frac{2}{9},\ 0(T) = \frac{3}{9},\ 0(Y) = \frac{4}{9} \text{ dur.}$$

Burada, Y nin olasılığı $= \dfrac{\text{Y nin eleman sayısı}}{\text{E nin eleman sayısı}}$

olduğunu görüyürsunuz. Bu eşitliği kısaca,

$$0(Y) = \frac{n(Y)}{n(E)}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu deneyde; M, T ve Y kümelerinin ortak elemanları yoktur. Yani, $M \cap T \cap Y = \emptyset$ olup, ayrık kümelerdir. Başka bir deyişle M, T ve Y olaylarından üçü, aynı zamanda meydana gelmez. Bu nedenle, aynı anda meydana gelmeyen olaylara **ayrık olaylar** denir.

Burada, $M \cup T \cup Y = E$ ve

$$0(M) + 0(T) + 0(Y) = 0(E) = \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = 1$$

olduğunu görüyorsunuz.

Genel olarak, ortaya çıkacak olan bir A olayının olasılığını 0 (A), A olayındaki muhtemel çıkanların sayısını n (A), muhtemel çıkanların toplam sayısını n (E) ile gösterirsek;

$$0(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

formülünü yazabiliriz.

A olayının olmaması (A değil) halinde, muhtemel çıkanların sayısı n (A değil) ise,

$$0(\text{A değil}) = \frac{n(\text{A değil})}{n(E)}$$

yazılabilir. A nın olması veya olmaması halinde,

$$[\, n(A) + n(\text{A değil}) = n(E) \text{ den dolayı}\,]$$

ve $0(A) + 0(\text{A değil}) = \dfrac{n(A)}{n(E)} + \dfrac{n(\text{A değil})}{n(E)} = \dfrac{n(E)}{n(E)} = 1$

olur. O halde, bir A olayının olması veya olmaması olasılığında,

$$0(A) + 0(\text{A değil}) = 1$$

oluyor. Eğer, bir M olayı daima oluyorsa, $0(M) = 1$; eğer, bir N olayı hiç olmuyorsa, $0(N) = 0$ dır. Buradan, herhangi bir K olayı için :

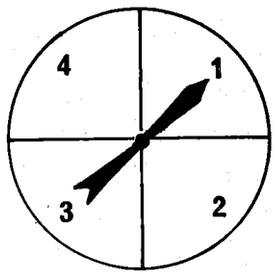
$$0 \leqslant 0(K) \leqslant 1$$

sonucunu çıkarabiliriz. Bu Bağıntı, **"0 (K) sıfırdan büyük ya da 0 a eşit ve 1 den küçük ya da 1 e eşit"** anlamındadır.

"A veya B" nin Olasılığı

1. Örnek :

1. şekil, dört daire kesmesi birbirine eş olan tek göstergeli ve hilesiz bir oyun aracıdır. Göstergeyi çevirirseniz 1, 2, 3 ve 4 sayıları ile gösterilen, eş bölgelerden biri üzerinde durmaktadır. Göstergenin tek sayılardan biri üzerinde durmasının olasılığı nedir?



1. Şekil

Şekilde, gösterge 1 i göstermektedir. Eğer, gösterge, ayırma çizgilerinden biri üzerinde duruyorsa, söz gelişi 3 ile 4 arasındaki çizgi üzerinde durursa 3 ü, benzer biçimde 4 ile 1 arasındaki çizgi üzerinde durmuşsa, 4 ü gösterdiğini kabul edeceğiz. Bu deneyde, muhtemel dört çıkan vardır. Bu nedenle, $E = \{1, 2, 3, 4\}$ tür. Gösterge 1 veya 3 ü gösterdiği, yani dört çıkandan bu ikisi görüldüğü zaman, tek sayıyı gösterme olayı olunur. O halde, göstergenin tek sayılarda durmasının olasılığı $\frac{2}{4}$ olur.

Aslında, göstergenin bir tek sayıyı göstermesi olayı, iki ayrı olayın birleşmesinden oluşmuştur. Göstergenin 1 i göstermesi olayına A ve 3 ü göstermesi olayına da B diyelim. Eğer A ya da B olayından birinin olması olayını "A veya B" sembolü ile gösterirsek, **"A veya B" olayı,**

göstergenin tek sayılardan birini gösterdiğini anlatır. Böylece, daha önce bulduğumuz olasılığı :

$$0(\text{A veya B}) = \frac{2}{4}$$

biçiminde yazabiliriz.

Bu olasılığı, A ve B olaylarını ayrı ayrı ele alarak hesaplayabilir miyiz? A ve B olayları eş olumlu ve ayrık iki olay olduğu için, A ve B olaylarının olasılıkları :

$$0(A) = \frac{1}{4} \text{ ve } 0(B) = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

$\frac{1}{4}$ ile $\frac{1}{4}$ toplanırsa $\frac{2}{4}$ elde edileceğini biliyorsunuz. Buradan, $0(A)$ ve $0(B)$ yardımıyla $0(\text{A veya B})$ elde edilir. $\frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ yazılır. Bu bağıntıyı; A, B birer küme ve $A \cap B = \emptyset$ olduğundan,

$$0(A \cup B) = 0(A) + 0(B) \text{ ya da}$$

$$0(\text{A veya B}) = 0(A) + 0(B) \text{ biçiminde}$$

gösterebiliriz.

2. Örnek :

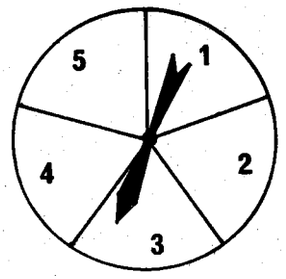
2. şekil; 1, 2, 3, 4, 5 sayıları ile gösterilen daire kesmeleri eş olan, tek göstergeli ve hilesiz bir oyun aracıdır. Gösterge kolu serbestçe hareket ettiğine göre, tek sayılardan birinde durmasının olasılığı nedir?

Muhtemel beş çıkan vardır. Bu nedenle, $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tir. Beş çıkandan üçü, $\{1, 3, 5\}$ istenilen çıkandır. İstenilen çıkanların olaylarını A, B ve C ile gösterelim. A olayı göstergenin 1 de durmasını; B olayı. 3 te durmasını C olayı da 5 te durmasını anlatmaktadır. Gösterge tek yönlü olduğu için, her dönme zamanında, gösterge bu sayılardan ancak biri üzerinde durabilir. Bu nedenle, A, B ve C olayları ayrık ve eş olumludurlar.

Bu deneyde : $0(A) = \frac{1}{5}$, $0(B) = \frac{1}{5}$ ve $0(C) = \frac{1}{5}$ olduğunu biliyorsunuz, Buradan,

$$0\,(\text{A veya B veya C}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \text{ olur.}$$

O halde, $0\,(\text{A veya B veya C}) = 0\,(A) + 0\,(B) + 0\,(C)$ dir.



2. Şekil

Bu bağıntıyı A, B, C birer küme ve $A \cap B \cap C = \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ ise, $0\,(A \cup B \cup C) = 0\,(A) + 0\,(B) + 0\,(C)$ biçiminde yazabiliriz.

Sonuç : Ayrık olayların birleşiminin olasılığı, bu olayların olasılıkları toplamına eşittir.

3. Örnek :

Bir torbaya, 1 den 10 a değin numaralanmış 10 küçük kart konuyor. Gözü kapalı bir öğrenci bir kart çekiyor.

a) Tek numaralı bir kartın çıkma olasılığı nedir?

b) Çift numaralı bir kartın çıkma olasılığı nedir?

c) Çift veya 5 ten küçük bir kartın çıkma olasılığı nedir?

Çözüm :

Bu deneyde, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ve $n\,(E) = 10$ dur.

a) Torbadan, tek numaralı bir kartın çıkması olayı A ise, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ve $n\,(A) = 5$ tir. O halde,

$$0\,(A) = \frac{n\,(A)}{n\,(E)} = \frac{5}{10} \text{ dur.}$$

b) Torbadan, çift numaralı bir kartın çıkması olayı B ise, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ve $n\,(B) = 5$ tir. Öyleyse,

$$0\,(B) = \frac{n\,(B)}{n\,(E)} = \frac{5}{10} \text{ olur.}$$

Bu deneyde, A ve B olayları ayrık olaylar mıdır? $0\,(A) + 0\,(B) = 1$ dir niçin?

c) Torbadan, 5 ten küçük bir kartın çıkması olayı C ise, $C = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $n\,(C) = 4$ tür. O halde,

$$0\,(C) = \frac{n\,(C)}{n\,(E)} = \frac{4}{10} \text{ dur.}$$

Bizden, "çift numaralı veya 5 ten küçük numaralı" bir kartın çıkması olasılığı istenmektedir. Oysa, (b) şıkkında, çift numaralı bir kartın çıkması olayında, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ve $0\,(B) = \frac{5}{10}$ bulmuştuk.

Gördüğünüz gibi, $B \cap C = \{2, 4\}$, $n\,(B \cap C) = 2$ ve $\frac{n\,(B \cap C)}{n\,(E)} = \frac{2}{10}$ dur. Yani, $B \cap C \neq \emptyset$ dir, O halde, B ve C ayrık iki küme değildir. Bu nedenle, B ve C olayları da ayrık iki olay değildir. Öyleyse,

$0\,(\text{B veya C}) \neq 0\,(B) + 0\,(C)$ yazılabilir.

Gerçekten, $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$ ve $n\,(B \cup C) = 7$ dir. O halde, "B veya C" olayının olasılığı :

$$0\,(\text{B veya C}) = \frac{n\,(B \cup C)}{n\,(E)} = \frac{7}{10} \text{ olur.}$$

Bunlara göre :

$$\frac{7}{10} \neq \frac{5}{10} + \frac{4}{10} \text{ olduğundan,}$$

$0\,(\text{B veya C}) \neq 0\,(C)$ olduğu görülür.

Bu deneyde, $\frac{7}{10} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2}{10}$ olduğu için;

$$\frac{n(B \cup C)}{n(E)} = \frac{n(B)}{n(E)} + \frac{n(C)}{n(E)} - \frac{n(B \cap C)}{n(E)} \text{ ve}$$

$$0(B \text{ veya } C) = 0(B) + 0(C) - 0(B \cap C)$$

olduğuna dikkat ediniz.

"A ve B" nin Olasılığı

Bu kesimde, A ve B gibi bağımsız iki olayın aynı zamanda olması koşulundaki olasılığı bulmaya çalışacağız.

Atılan bir para ile beş eş daire kesmesi üzerine yazılmış 1, 2, 3, 4, 5 sayılarını gösteren bir göstergeyi ele alalım. Para atıldığı zaman üste gelen şekil, dönen göstergenin, kadrandaki hangi sayıda duracağını hiçbir biçimde etkilemez. Buna göre, paranın atıldığı zaman yazı gelmesi olayını A ve göstergenin 3 te durması olayını da B ile gösterirsek. A ve B olayları bağımsız olaylar olur. Paranın atılmasında, çıkanların oluşturduğu küme $E_1 = \{ T, Y \}$ ve göstergenin döndürülmesi ile çıkanların oluşturduğu küme de $E_2 = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ tir. Bu nedenle A olayının olasılığı $0(A) = \frac{1}{2}$ ve B olayının olasılığı $0(B) = \frac{1}{5}$ tir". Paranın yazı gelmesi ve göstergenin 3 te durması" olayının olasılığını bulmak istersek, aynı zamanda oluşan iki olayın olasılığını incelemiş oluruz. A ve B olaylarının her ikisinin aynı zamanda oluşmasını "A ve B" olayı biçiminde nitelersek **0 (A ve B)** olasılığını gözönüne alacağız demektir. Bu denemede, çıkabilenlerin oluşturduğu evrensel küme :

$$E = \{ (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5),$$
$$(Y, 1), (Y, 2), (Y, 3), (Y, 4), (Y, 5) \}$$

biçiminde ikililerden meydana gelir. Bu, E kümesi 10 elemanlıdır. E kümesindeki (Y, 5) ikilisi, paranın yazı geldiğini ve göstergenin 5 te durduğunu anlatır. Bizden istenen olay, (Y, 3) ve bu olay muhtemel çıkanların onda biri olduğuna göre,

$$0(A \text{ ve } B) = \frac{1}{10} \text{ olur.}$$

$0(A) = \frac{1}{2}$ ve $0(B) = \frac{1}{5}$ olduğunu biliyoruz.

$\frac{1}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$ olduğundan.

$0(A \text{ ve } B) = 0(A) \cdot 0(B)$ eşitliği yazılabilir.

Bu bağıntı, A ve B birer küme ise;

$0(A \cap B) = 0(C) \cdot 0(B)$ biçiminde gösterilir.

Sonuç : Bağımsız olayların birlikte meydana gelme olasılığı, bu olayların olasılıkları çarpımına eşittir.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir sınıfta, 18 kız ve 24 erkek öğrenci bulunuyor. Her öğrencinin adı bir fişe yazılıp, bir torbaya konuyor. Torbadan gelişigüzel bir fiş çekiliyor.

a) Bir kız öğrenci adının çıkması olasılığı nedir? $\left(\text{Cevap : } \frac{3}{7}\right)$.

b) Bir erkek öğrenci adının çıkması olasılığı nedir? $\left(\text{Cevap : } \frac{4}{7}\right)$.

2. Bir torbaya, 1 den 30 a değin (1 ve 30 dahil) numaralanmış fişler konuyor. Bir fiş gelişigüzel çekiliyor.

a) 18. numaralı fişin çıkması olasılığı nedir?

b) Tek numaralı bir fişin çıkması olasılığı nedir?

c) Çift numaralı bir fişin çıkması olasılığı nedir?

d) Asal bir sayı fişinin çıkması olasılığı nedir $\left(\text{Cevap : } \frac{1}{3}\right)$.

3. Bir küpün, 3 yüzü mavi, 2 yüzü sarı, 1 yüzü de beyaz boyalıdır.

a) Bu küp, bir kez atılırsa, mavi yüzün üste gelmesi olasılığı ne dir?

b) Bu küp, iki kez atılırsa, ikisinde de sarı yüzün üste gelmesi olasılığı nedir? $\left(\text{Cevap : } \frac{1}{9}\right)$.

c) Bu küp, iki kez atılırsa, ikisinde de beyaz yüzün üstüne gelmesi olasılığı nedir? $\left(\text{Cevap : } \frac{1}{36}\right)$.

4. Hilesiz üç para atıldığı zaman :

a) Üçününde tura gelmesi olasılığı nedir?

b) İki tanesinde tura, birinde yazı gelmesinin olasılığı nedir?

Açıklama :

$E = \{ (T, T, T), (T, T, Y), (T, Y, T), (T, Y, Y), (Y, T, T), (Y, T, Y), (T, Y, Y), (Y, Y, Y) \}$ olur.

5. Bir torbada, 6 mavi, 3 beyaz ve 4 yeşil bilye bulunuyor.

a) Bir çekilişte mavi bir bilyenin çıkması olasılığı nedir?

b) İlk çekilişte mavi bir bilyenin çıktığını ve bunun tekrar torbaya konulmadığını farzedelim. İkinci bir çekilişte beyaz bir bilyenin çıkması olasılığı nedir?

c) İlk çekilişte mavi bir bilyenin, ikinci çekilişte, beyaz bir bilyenin çıktığını ve bunların tekrar torbaya konulmadığını farzedersek, üçüncü bir çekilişte yeşil bir bilyenin çıkması olasılığı nedir?

Yol gösterme : a) için, $n(E) = 13$, b) için, $n(E_1) = 12$ ve c) için, $n(E_2) = 11$ olacağını düşününüz.

6. Bir küpün her bir yüzüne K, L, M, N, R, S harflerinden yalnız biri yazılıyor.

a) Bu küp, bir kez atılırsa, N nin üst yüzde görülmesinin olasılığı nedir?

b) Bu küp, bir kez atılırsa, üste gelen yüzün "K veya N" olması olasılığı nedir? $\left(\text{Cevap : } \frac{1}{3}\right)$.

c) Bu küp, arka arkaya iki kez atılırsa, her iki atışta da R nin üst yüzde görülmesinin olasılığı nedir? $\left(\text{Cevap : } \frac{1}{36}\right)$.

7. Bir kutuya, 1 den 8 e değin numaralanmış 8 küçük etiket konuyor. Gözü kapalı bir öğrenci, bir etiket çekiyor.

a) Tek numaralı bir etiketin çıkması olasılığı nedir?

b) Çift numaralı bir etiketin çıkması olasılığı nedir?

c) "Tek numaralı veya 5 ten küçük numaralı" bir etiketin çıkması olasılığı nedir? $\left(\text{Cevap : } \frac{3}{4}\right)$.

Yol gösterme : c) için, olaylar B, C ise; $B \cap C \neq \emptyset$ ve

$0(B \text{ veya } C) \neq 0(B) + 0(C)$ olduğunu görürüz.

8. Bir çift tavla zarı aynı anda atılıyor. Aşağıdaki olasılıkları hesaplayınız.

a) Her iki zarın üstüne gelen sayının tek sayı olması.

b) Her iki zarın üstüne gelen sayının çift olması.

c) İki zarın üstüne gelen sayılar toplamının 5 olması.

d) İki zarın üstüne gelen sayılar toplamının çift olması.

e) İki zarın üstüne gelen sayılar toplamının 3 ile bölünebilir sayı olması.

f) Her iki zarın üstüne gelen sayının asal olması.

g) İki zarın üstüne gelen sayılardan birinin tek, diğerinin çift sayı olması.

Açıklama :

Bir zardaki sayıların kümesini M ile gösterelim.

$M = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ dir. Deneyin evrensel kümesi ise, $M \times M$ nin sıralı ikililerinin oluşturduğu E kümesidir. O halde,

$E = \{ (1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (6,6) \}$ ve $n(E) = 36$ dır.

a) Her iki zardaki sayının tek sayı olması olayı A ise,

$A = \{ (1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5) \}$ dir.

b) Her iki zardaki sayının çift sayı olması B ise,

$B = \{ (2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6) \}$ dir.

c) Her iki zardaki sayının toplamının 5 olması olayı C ise,

$C = \{ (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) \}$ dir.

d) Her iki zardaki sayının toplamının çift sayı olması olayı D ise, n (D) = 18 olur. Niçin?

e) Her iki zardaki sayının toplamının 3 ile bölünebilmesi olayı K ise,
n (K) = 12 olur Niçin?

f) Her iki zardaki sayının asal sayı olması olayı F ise,
n (F) = 9 dur. Niçin?

g) Bu zarların birinin tek, diğerinin çift sayılı olması olayı G ise, n (G) = 18 dir. Niçin?

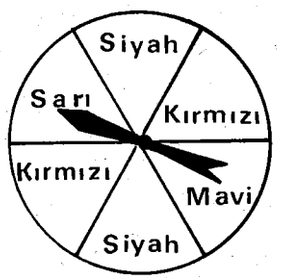
Bu açıklamalardan faydalanarak sonuçları bulunuz.

9. Bir kalem kutusunda, 4 ü sert, diğerleri yumuşak uçlu olmak üzere aynı renk 16 kalem vardır. Bu kutudan, gelişigüzel bir kalem alsanız, bu kalemin;

a) Sert uçlu bir kalem olmasının olasılığı nedir?

b) Yumuşak uçlu bir kalem olmasının olasılığı nedir? $\left(\text{Cevap}: \frac{3}{4}\right)$.

e) "Sert veya yumuşak uçlu" olmasının olasılığı nedir? (Cevap : 1).



M

M Aracı

N

N Aracı

10. Yukarıdaki şekiller, hilesiz iki oyun aracıdır. Her araçtaki daire kesmeleri kendi aralarında birbirine eşittir. Göstergeler aynı anda döndürülüyor. M aracındaki göstergenin sarıda, N aracındaki göstergenin de kırmızıda durmasının olasılığı nedir? $\left(\text{Cevap}: \frac{1}{24}\right)$.

11. 52 lik bir deste iskambil kâğıdından bir kart çekiliyor.

a) Çekilen kartın bir kupa olması olasılığı nedir? $\left(\text{Cevap}: \frac{1}{4}\right)$.

b) Çekilen kartın bir yedili olması olasılığı nedir? $\left(\text{Cevap}: \frac{1}{13}\right)$.

c) Çekilen kartın "sinek veya karo" olması olasılığı nedir? $\left(\text{Cevap}: \frac{1}{2}\right)$.

d) Çekilen kartın "Kupa ası" olması olasılığı nedir? $\left(\text{Cevap}: \frac{1}{52}\right)$.

12. Bir küpün, herbir yüzüne A, B, C, D, E ve F harflerinden yalnız biri yazılıyor. Bu küp ile bir madeni para birlikte atılıyor. "**para**" nın yazı ve küpün üst yüzünde D gelmesi" olasılığı nedir. $\left(\text{Cevap}: \frac{1}{12}\right)$.

13. Bir koşuda; M, N, R isimli üç koşucu vardır. M nin kazanma olasılığı, N nin kazanma olasılığının 2 katı ve N nin kazanma olasılığı da, R nin kazanma olasılığının 3 katıdır. Bu koşucuların birbirlerine göre, ayrı ayrı kazanma olasılıkları nedir? $\left(\text{Cevap}: \frac{6}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right)$.

Yol gösterme :

O (R) = a olsun, O (N) = 3 a, O (M) =6a ve O (M) + O (N) + O(R) = 1 olduğunu düşününüz.

İKİNCİ BÖLÜMÜN TEST SORULARI

1. Pascal üçgeninin altıncı satırındaki sayıların toplamı, aşağıdakilerden hangisidir?

a) 32 b) 128 c) 64 d) 54 e) 16

2. $(3a - 2)^2$ açılımı, aşağıdakilerden hangisidir?

a) $9a^2 - 12a + 4$ b) $9a^2 + 12a + 4$ c) $9a^2 - 6a + 4$

d) $9a^2 - 24a + 4$ e) $9a^2 - 12a - 4$

3. Aşağıdakilerden hangisi **yanlıştır**?

a) $0! = 1$ b) $14! = 14.13.(12!)$ c) $12.11.(10!) = 12!$

d) $10.8! = 10!$ e) $13.12.11.(10!) \neq 13$

4. P (n, r) için aşağıdakilerden hangisi **yanlıştır**?

a) $n > r$ b) $n < r$ c) $n \geqslant r$ d) $n = r$ e) Hiç biri

5. $P(n, r) = 16.15.14.13.12$ ise, P (n, r) aşağıdakilerden hangisidir?

a) P (16,21) b) P (5,16) c) P (16,4) d) P (16,6) e) .P (16,5)

6. $5! \, x = 7!$ ise, x sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 35 b) 42 c) 2! d) 28 e) Hiçbiri.

7. 5 ciltlik bir roman ile 2 ciltlik bir sözlük; roman ciltleri bir birinden ve sözlük ciltleri birbirinden ayrılmamak koşuluyla kaç değişik biçimde sıralanabilir?

a) 120 b) 10 c) 240 d) 480 e) Hiç biri.

8. 4 oda, her oda farklı bir renkte boyanmak üzere; 7 tür boya ile kaç değişik biçimde boyanabilir?

a) 840 b) 28 c) 240 d) 360 e) Hiç biri.

9. 7 nokta, bir çember üzerine kaç değişik biçimde yazılabilir?

a) 5040 b) 360 c) 2520 d) 1640 e) 720

10. P (6, 0) ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

a) 0 b) 6 c) 1 d) 2 e) Hiç biri.

11. K (6,0) ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisifdir?

a) 1 b) 0 c) 2 d) 6 e) Hiç biri.

12. 3! . K (9,4) ün değeri aşağıdakilerden hangisidir?

a) 42 b) 63 c) 126 d) 21 e) Hiç biri.

13. s (A) = 10 ise; A nın, 4 elemanlı alt küme sayısı kaç tanedir?

a) 63 b) 210 c) 126 d) 560 e) 252

14. Bir işyerinde, 7 si erkek, 6 sı kadın işçi arasından 4 kişilik bir çalışma grubu kaç değişik biçimde oluşturulabilir?

a) 50 b) 210 c) 1001 d) 1430 e) 715

15. 8 işçi ile biri 4 kişilik, diğeri 3 kişilik iki çalışma grubu kaç değişik biçimde oluşturulabilir?

a) 3920 b) 126 c) 280 d) 980 e) 560

16. 7 keçisi, 4 koyunu ve 3 kuzusu olan bir köylü; 5 keçi, 3 koyun ve 2 kuzuyu kaç değişik biçimde satabilir?

a) 584 b) 252 c) 504 d) 168 e) Hiç biri.

17. Bir sınıfta, 9 kız öğrenci vardır. Bu sınıftaki erkek öğrencilerin sayısı, kız öğrencilerin sayısının 4 katından 3 eksiktir. Bu sınıftaki her öğrencinin adı birer fişe yazılıp, bir torbaya konuyor. Torbadan, gelişigüzel bir fiş çekildiğinde; bu fişin bir **kız öğrenciye** ait olmasının olasılığı nedir?

a) $\frac{3}{14}$ b) $\frac{11}{14}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{42}$ e) Hiç biri.

18. Bir torbada 8 kırmızı, 5 mavi ve 7 beyaz bilye vardır. Bu torbadan çekilen bir bilyenin "**Kırmızı veya beyaz**" olmasının olasılığı nedir?

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{7}{50}$ e) Hiç biri.

19. Bir küpün 3 yüzünde A, 1 yüzünde B ve 2 yüzünde de C harfleri yazılıdır. Bu küp ile bir tavla zarı birlikte atılırsa, "**Küpün üst yüzünde C ve zarın üst yüzünde tek bir sayı**" görülmesinin olasılığı nedir?

a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{18}$ d) $\frac{1}{6}$ e) Hiç biri.

20. Bir tavla zarı ile bir madeni para birlikte atılıyor. "**Zarın üst yüzünde 4 ve paranın tura**" gelmesinin olasılığı nedir?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{4}$ e) Hiç biri.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

BENZER ÜÇGENLER VE ORANTILI ÇOKLUKLAR

3-1. DOLAYLI ÖLÇME, ORAN VE ORANTI

Matematikte, ölçülebilen ya da sayı ile ifade edilebilen nesnelere **çokluk** denir. Örneğin : odanızın boyutları, alanı. hacmi; sınıfınızdaki öğrenci sayısı; bakkalınızdan aldığınız şekerin değeri; boyunuzun uzunluğu; ağırlığımızın ölçüsü; evinizdeki eşyalar birer çokluktur.

Doğrudan ölçme olanağı bulamadığımız bazı çoklukların uzunluklarını, dolaylı yollardan ölçebiliriz. Örneğin, yerin güneşe veya gezegenlere uzaklıklarını ölçmek için, yerden bunlara bir şerit metre çekemeyiz. Yer küremizin çapını, merkezinden bir demir çubuk geçirerek ölçemeyiz. İşte, bu tür uzunlukları dolaylı bir yoldan ölçeriz. Bunu yapmak için, bir üçgenin elemanları arasındaki bağıntıdan yararlanırız.

Ayrıca, günlük yaşantımızdaki bazı problemleri de dolaylı ölçme yöntemiyle çözeriz. Örneğin, güneşli bir günde okulumuzun bayrak direğinin yüksekliğini ölçmek isteyelim. Bayrak direğinin gölgesini ölçebiliriz. Bu gölgenin boyu 9 m olsun. Arkadaşımız Barış'ın boyu 160 cm, gölgeside 200 cm olsun. Yani Barış'ın boyu, gölgenin "200 de 160 şına $\left(\frac{160}{200} = \frac{4}{5}\right)$" ya da "beşte dördüne" eşittir. Bu, $\frac{4}{5}$ sayısına, Barış'ın boyu ile gölgesinin uzunlukları arasındaki **oran** denir. O halde, bayrak direğinin yüksekliği ile gölgesinin uzunluk oranının $\frac{4}{5}$ olması gerektiği kanısına varabiliriz. Böylece, $\frac{x}{9} = \frac{4}{5}$ orantısını yazabiliriz. Çarpmanın özeliklerinden yararlanarak : $\left(9 \cdot \frac{1}{9}\right).x = \frac{4}{5} \cdot 9$ yazabiliriz ve buradan, $x = \frac{36}{5} = 7{,}2$ buluruz.

Öyleyse, bayrak direğinin boyu 7,2 m dir.

Genel olarak, x metre uzunluğun y metre uzunluğa oranı, $\frac{x}{y}$ biçiminde gösterilir ve "**x in y ye oranı**" diye okunur.

Yukarıda, Barış'ın boyu ile gölgesinin uzunlukları arasındaki oranı, $\frac{4}{5}$ olarak bulmuştuk. 4 ü 5 e bölersek, $\frac{4}{5} = 0{,}8$ buluruz.

Oysa, $\frac{4}{5} = \frac{4.20}{5.20} = \frac{80}{100} = 0{,}8$ ve $\frac{80}{100} = \frac{80:10}{100:10} = \frac{8}{10} = 0{,}8$ dir.

O halde, **bir oranın terimleri, sıfır olmayan bir sayı ile çarpılır veya bölünürse,** oranın değeri değişmez.

Tanım : Her a, b, c, d $\in$ G için,

$$(a, b) \neq (0,0) \text{ ve } (c, d) \neq (0,0)$$

olmak üzere seçilen (a, b) ve (c, d) ikili çiftinde $a.d = b.c$ bağıntısı varsa, (dışlar çarpımı içler çarpımına eşitse) bu çiftler **orantılıdır** denir.

Bu bağıntı, çoğu kez $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ biçiminde yazılır. $\frac{a}{b}$ oranında, $b = 0$ olabileceğinden, $\left(\frac{7}{0}\right.$ gibi. Buna, "7 nin 0 a oranı" denir. Fakat; "7 nin 0 a bölümü denemez. Çünkü, sayının 0 a bölümü tanımlanmamıştır.$\left.\right)$ "a bölü b" değil, "a nın b ye oranı" diye okunur. Eğer $b \neq 0$ ise, $\frac{a}{b}$ oranına "a bölü b" denilmesinde bir sakınca yoktur.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ orantısında, a ve d ye orantının **dışları**; b ve c ye de orantının **içleri** denir.

3-1.1 Orantının Özelikleri

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$ (dışlar çarpımı, içler çarpımına eşittir).
2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ (dışlar yer değiştirebilir).
3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (içler yer değiştirebilir).
4. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (oranların tersleri alınabilir).

Not : Orantının başka özelikleri de vardır. Bunları, Lise 1. sınıfta inceleyeceksiniz.

Tanım :

1. a, b, c, $x \in G$ sayıları arasında, $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ bağıntısı varsa, x sayısına, ilk üç sayının **dördüncü orantılısı** denir.

Örneğin, a = 5, b = 8, c = 3 sayılarının dördüncü orantılısı :

$$\frac{5}{8} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow 5x = 24 \Leftrightarrow x = \frac{24}{5} = 4{,}8 \text{ dir.}$$

2. $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ koşulunu gerçekleyen pozitif bir x sayısı varsa, bu x sayısına, a ve b nin **orta orantılısı** ya da **geometrik ortası** denir. Örneğin, a = 3, b = 12 sayılarının orta orantılısı :

$$\frac{3}{x} = \frac{x}{12} \Leftrightarrow x^2 = 36,\ x = \sqrt{36} = 6 \text{ dır.}$$

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki eşitlikleri, birer orantı biçiminde yazınız.

a) $m \cdot k = n.p$ b) $5 \cdot k = 4.p$ c) $x^2 = m.n$

d) $3.6 = 2.9$ e) $5 \cdot 15 = 3.25$ f) $3 \cdot m = 7.n$

2. Aşağıdaki orantılarda, x i bulunuz.

a) $\frac{x}{7} = \frac{9}{3}$ b) $\frac{6}{x} = \frac{4}{9}$ c) $\frac{3}{5} = \frac{12}{x}$

d) $\frac{0{,}5}{7} = \frac{x}{28}$ e) $\frac{x}{1.5} = \frac{8}{0.45}$ f) $\frac{2.5}{3} = \frac{0{,}21}{x}$

3. Aşağıdaki sayıların yazılış sırasına göre, dördüncü orantılısını bulunuz.

a) 4, 7, 16 b) 8, 7, 6 c) 6, 8, 15

4. Ali'nin ağırlığı 45 kg dır. Ülkü'nün ağırlığı ise, Ali'nin ağırlığının $\frac{1}{9}$ u kadar daha fazladır. Ali'nin ağırlığının, Ülkün'ün ağırlığına, oranını bulunuz. $\left(\text{Cevap : } \frac{9}{10}\right)$.

5. Nilgün'ün kumbarasında 133 lira vardır. Nilgün'ün parasının, Süha'nın parasına oranı $\frac{7}{6}$ olduğuna göre, Süha'nın parasını bulunuz. (Cevap : 114 lira).

6. 5 saniyede, ortalama 100 m yol giden bir otomobil, 1 saatta kaç km yol gider? (Cevap : 72 km).

7. $\frac{3}{4}$ ü ile 18 m kumaş alınan paranın, $\frac{2}{3}$ ü ile kaç m kumaş alınır? (Cevap : 16 m).

8. 7,5 litre sütten 0,6 kg yağ çıkıyor. Her biri günde 14 litre süt veren 5 inekten, 4 günde kaç kg yağ elde edilir? (Cevap : 22,4 kg).

Açıklama :

Süt miktarları arasındaki oran ile yağ miktarları arasındaki oranlar eşittir. O halde,

1. Yol : $\frac{7{,}5}{(14.5) \cdot 4} = \frac{0{,}6}{x}$ olur.

2. Yol : 1 litre sütten $\frac{0{,}6}{7{,}5}$ kg ve (14.4) . 4 litre sütten de $\frac{6}{75}$. (14.5) . 4 kg yağ çıkar.

9. 8,75 kg zeytinden, 1,4 litre yağ elde ediliyor.

a) 630 kg zeytinden, kaç litre yağ elde edilir? (Cevap : 100,8 litre).

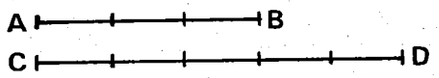
b) 84 litre yağ, kaç kg zeytinden elde edilir? (Cevap : 525 kg).

10. Bir otomobil, 25 km yolda, ortalama 3,2 litre benzin yaktığına göre; 57,6 litre benzin ile kaç km yol gider? (Cevap : 450 km).

11. Düzinesi 27 lira olan kalemden, 216 kalem satan bir kırtasiyecinin eline kaç lira geçer? (Cevap : 486 L).

3–1.2. Doğru Parçaları Arasındaki Oran ve Orantı

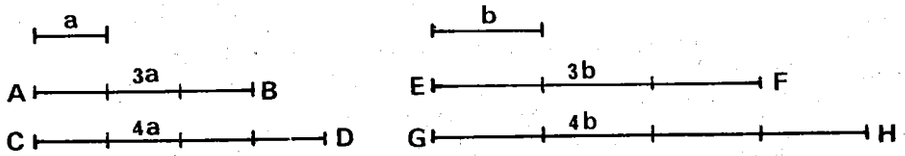
1. Şekilde [AB] ve [CD] doğru parçalarını görüyorsunuz. [AB] nın uzunluğu, $|AB|$ biçiminde gösterilir.



1. Şekil

[AB] ve [CD] nın oranı, $\frac{|AB|}{|CD|}$ biçiminde yazılır, "AB nin CD ye oranı" diye okunur.

Şekilde, $|AB| = 3$ birim, $|CD| = 5$ birim uzunluk alındığından; [AB] ve [CD] doğru parçalarının oranı, $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{3}{5}$ ya da $\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{5}{3}$ tür.



2. Şekil

2. Şekilde,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4} \\ \frac{|EF|}{|GH|} = \frac{3b}{4b} = \frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|EF|}{|GH|}$$

Yazılabilir. Buna, bu dört doğru parçası arasındaki **orantı** denir.

Örneğin, $|AB| = 6$ cm, $|CD| = 8$ cm, $|EF| = 12$ cm ise;

$\frac{6}{8} = \frac{12}{|GH|} \Leftrightarrow 6 \cdot |GH| = 8.12 \Leftrightarrow |GH| = \frac{96}{6} = 16$ cm olur.

ALIŞTIRMALAR

1. $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 4$ cm ve $|EF| = 9$ cm ise; $|AB|$ uzunluğu, diğer iki uzunluk arasında orta orantılıdır. Niçin?

2. Bir doğru üzerine 3 er cm aralıklarla ve sıra ile M,N,P,R,S,T noktaları alınıyor.

a) $\frac{|PM|}{|PT|}$ oranını bulunuz. Bu orana, P noktasının [MT] doğru parçasını **bölme oranı** denir.

b) $\frac{|RM|}{|RT|}$ ve $\frac{|NM|}{|NT|}$ oranlarını bulunuz.

c) N noktası, [MS] nı hangi oranda böler?

3. Bir doğru üzerinde, $|AB| = 2$ cm, $|BC| = 3$ cm, $|CD| = 4$ cm ve [DE] nı, bu uzunluklarla dördüncü orantılı yapacak biçimde bir E noktası alınıyor.

a) $|DE|$ uzunluğu kaç cm dir?

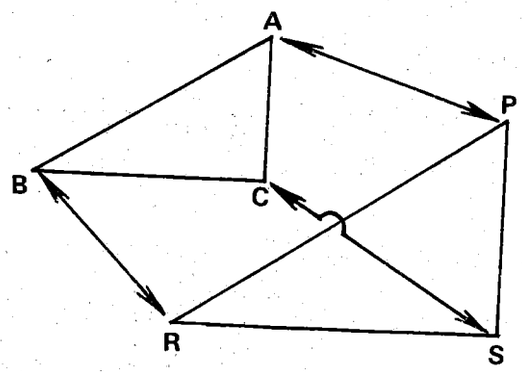
b) $|AE|$ uzunluğu kaç cm dir?

c) $\frac{|AC|}{|AE|}$ oranını bulunuz.

d) D noktası [AE] nı hangi oranda böler?

3–2. BENZER ÜÇGENLER

3–2.1 Üçgenlerin Eşliği



3. Şekil

3. Şekildeki $\triangle ABC$ ve $\triangle PRS$ üçgenleri arasında bir takım bağıntılar vardır. Şekilde gördüğünüz gibi, köşeleri arasında bir **"bire-bir"** eşleme kurabiliriz. Bu eşleme :

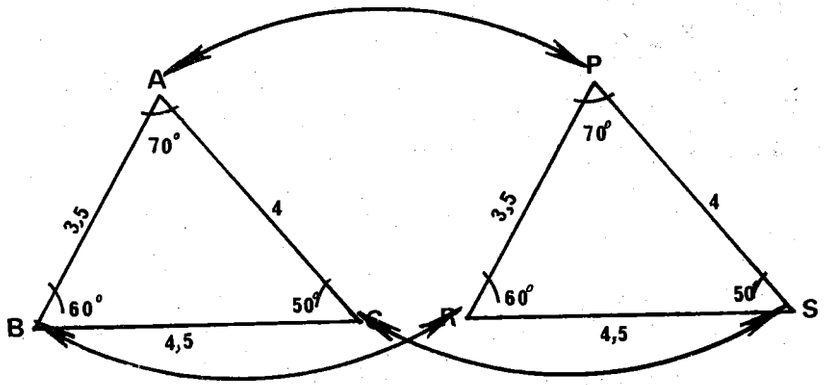
$$A \leftrightarrow P,\ B \leftrightarrow R,\ C \leftrightarrow S$$

biçiminde gösterilir. Bu eşlemeyi kısa olarak, $ABC \leftrightarrow PRS$ biçiminde gösterebiliriz. Burada, sol yandaki birinci harfin, sağ yandaki birinci harf ile soldaki ikinci harfin, sağdaki ikinci harf ile soldaki üçüncü harfin, sağdaki üçüncü harf ile eşleneceği anlaşılmaktadır. Köşeler arasındaki bu eşlemeye göre $\triangle ABC$ ve $\triangle PRS$ üçgenlerinin kenarları arasındaki eşlemeyi de :

$$[AB] \leftrightarrow [PR],\ [BC] \leftrightarrow [RS],\ [AC] \leftrightarrow [PS]$$ biçiminde yapabiliriz.

Tanım :

İki üçgenin köşeleri arasında bir **bire-bir** eşleme verilmiş olsun. Bu eşlemede, karşılıklı açılar ve karşılıklı kenarlar birbirine eş ise, bu üçgenlere **eş üçgenler** denir.



4. Şekil

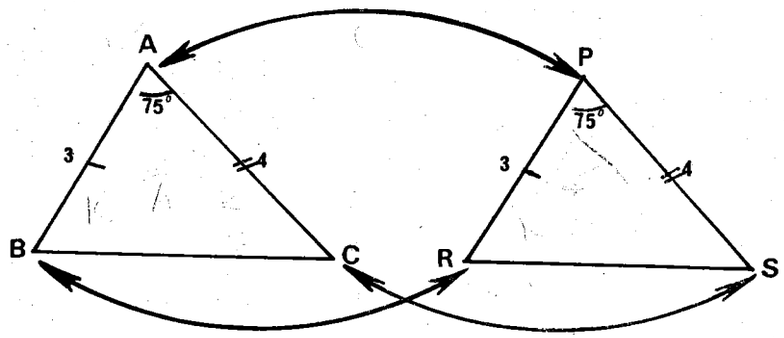
4. Şekilde gördüğünüz gibi, $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle PRS$ eşlemeleri ile verilen $\triangle ABC$ ve $\triangle PRS$ üçgenlerinin eşliği, $\triangle ABC \cong \triangle PRS$ biçiminde gösterilir. Tanıma göre :

$$\triangle ABC \cong \triangle PRS \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{P} & \text{ya da } s(\hat{A}) = s(\hat{P}) \\ \hat{B} \cong \hat{R} & \text{ya da } s(\hat{B}) = s(\hat{R}) \\ \hat{C} \cong \hat{S} & \text{ya da } s(\hat{C}) = s(\hat{S}) \\ [AB] \cong [PR] & \text{ya da } |AB| = |PR| \\ [BC] \cong [RS] & \text{ya da } |BC| = |RS| \\ [AC] \cong [PS] & \text{ya da } |AC| = |PS| \end{cases}$$

olur.

3-2.2. Kenar Açı Kenar Özeliği (K. A. K.)

İki üçgen (ya da bir üçgen ile kendisi) arasında bir **bire-bir** eşleme verilsin. Bu eşlemede, karşılıklı iki kenar ile bu kenarların oluşturduğu açılar eş ise, bu üçgen eştir.



5. Şekil

5. Şekle göre, $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle PRS$ eşlemesinde :

$$\left.\begin{array}{l} [AB] \cong [PR] \\ \hat{A} \cong \hat{P} \\ [AC] \cong [PS] \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle PRS \text{ dir.}$$

Soru : $|AB| = 3$ cm, $s(\hat{A}) = 75°$ ve $|AC| = 4$ cm olduğuna göre, ABC üçgenini çiziniz.

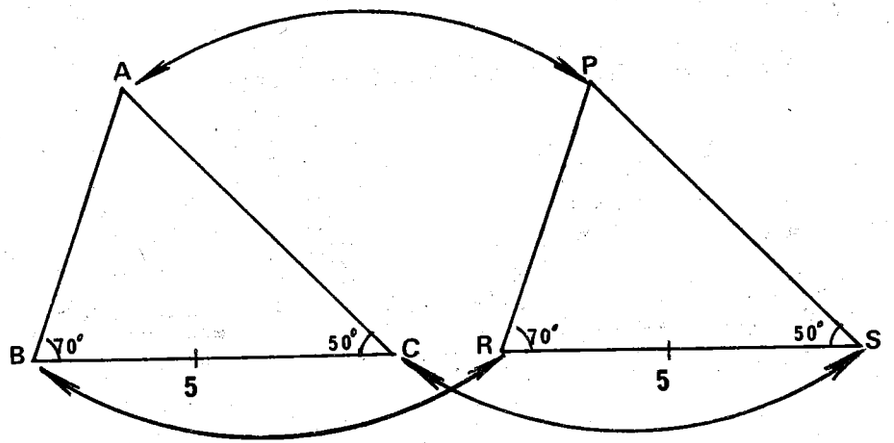
Çizim :

Önce, ölçüsü 75° olan $\widehat{DAE}$ açısını çiziniz. Bu açının kenarları üzerinde (pergel ya da cetvel ile) $|AB| = 3$ cm ve $|AC| = 4$ cm olacak biçimde $B \in [AD$ ve $C \in [AE$ alınız. Böylece, düzlemde bulduğunuz, A, B, C noktaları, $\triangle ABC$ üçgeninin köşeleri olur mu?

[AD ve [AE ışını olarak düzlemin farklı ışınlarını alsanız ve yukarıdaki ölçüleri kullanarak, üçgenler çizseniz; bu üçgenler birbirine eş olur mu?

3–2.3. Açı Kenar Açı (A. K. A.) Özeliği

İki üçgen (ya da bir üçgen ile kendisi) arasında bir **bire–bir eşleme** verilsin. İkişer açıları ile bu açılarda ortak olan kenarları eş ise, bu iki üçgen eştir.



6. Şekil

6. Şekilde, $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle PRS$ eşlemlerine göre;

$$\left.\begin{array}{c} \widehat{B} \cong \widehat{R} \\ [BC] \cong [RS] \\ \widehat{C} \cong \widehat{S} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle PRS \text{ dir.}$$

Sorular :

1. $s(\widehat{B}) = 70°$, $|BC| = 5$ cm ve $s(\widehat{C}) = 50°$ olduğuna göre; $\triangle ABC$ üçgenini çiziniz.

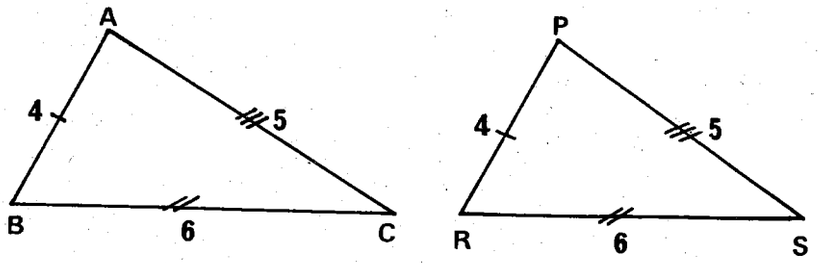
Çizim :

Önce, ölçüsü 70° olan $\widehat{XBY}$ açısını çiziniz. $|BC| = 5$ cm olacak biçimde $C \in [BY$ alınız. C noktasından, ölçüsü 50° olan $\widehat{BCZ}$ açısını çiziniz. [CZ ışını ile [BX ışınının kesişimi, üçgenin A köşesi olur mu? Böylece, $\triangle ABC$ üçgeni çizilmiş olur mu?

Yukarıdaki ölçüleri kullanarak, aynı tür çizimlerle yeni üçgenler çizseniz. Bu üçgnler eş olur mu? Çizdiğiniz üçgenleri kesip üst üste koyarak deneyiniz.

2. (A. K. A.) özeliğini (K. A. A.) özeliği biçimide ifade edebilirmiyiz?

3–2.4. Kenar Kenar Kenar (K. K. K.) Özeliği



7. Şekil

İki üçgen (ya da bir üçgen ile kendis') arasında bir **bire–bir eşleme** verilsin. Bütün karşılıklı kenarlar eş ise, üçgenler eştir.

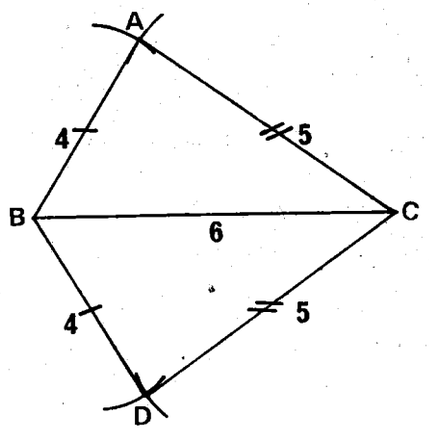
7. Şekle göre, $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle PRS$ eşlemesinde;

$$\left.\begin{array}{l} [AB] \cong [PR] \\ [BC] \cong [RS] \\ [AC] \cong [PS] \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle PRS \text{ dir.}$$

Soru : $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|AC| = 5$ cm olduğuna göre; $\triangle ABC$ üçgenini çiziniz.

Çizim :

Önce, kenarlarından birisi örneğin | BC | = 6 cm olan [BC] doğru parçasını çiziniz. B merkezli | AB | = 4 cm yarıçaplı çember ile C merkezli | AC | = 5 cm yarıçaplı çemberin kesim noktaları A ve D olur mu? Bu iki çember her zaman kesişir mi?



8. Şekil

Böylece, düzlemde bulduğunuz A, B, C, noktaları $\triangle ABC$ üçgeninin; D, B, C noktaları, $\triangle DBC$ üçgeninin köşeleri olur mu?

$\triangle ABC \cong \triangle DBC$ midir?

Bu eşliği, (K. K. K.) özeliği ile ifade ediniz ve 8. Şekli BC doğrusu boyunca katlayarak görünüz.

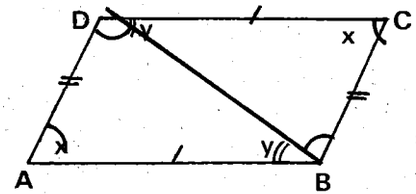
ALIŞTIRMALAR

1. $\triangle MNP \cong \triangle XYZ$ veriliyor. Birbirine eş olan açıları ve doğru parçalarını yazınız.

2. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ise, bu üçgenlerin köşeleri arasında 36 tür eşleme yapılabilir. Ancak, bu koşula uygun eşliğin tekliğini gösteriniz.

Yol gösterme : P (3,3) = 6 olduğunu düşününüz ve çarpma kuralından yararlanınız.

3. 9. Şekilde, ölçüleri eşit olan açılar ve kenarlar aynı işaretlerle gösterilmiştir. Bu üçgenler arasında, hangi bire-bir eşleme, bir eşliktir?



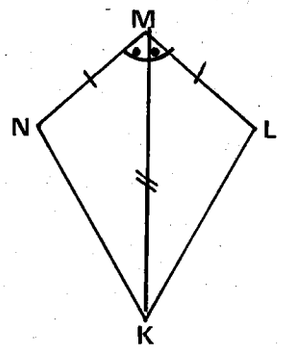
9. Şekil

4. 10. Şekilde, [MN] ≅ [ML] , s $(\widehat{NMK})$ = s $(\widehat{LMK})$ dir.

a) $\triangle MNK \cong \triangle MLK$ olduğunu gösteriniz.

b) [NK] ≅ [LK] olduğunu gösteriniz.

c) $\widehat{N} \cong \widehat{L}$, $\widehat{MKN} \cong \widehat{MKL}$ olduğunu gösteriniz.



10. Şekil

Açıklama :

1. Her | AB | = | AB | ⇒ [AB] ≅ [AB] dir. (her doğru parçası kendisine eştir). Bu özeliğe, doğru parçalarının **özeşliği** denir.

2. Her iki üçgende de, [MK] ≅ [MK] (ortak ya da özeşlik) olduğunu görürüz.

3. Eş üçgenlerde, eş olan açılar karşısında eş kenarlar, eş eş kenarlar karşısında, eş açılar olduğunu düşününüz.

5. | MN | = 5 cm olan, [MN] doğru parçasının, D orta noktasından çıkılan dikme üzerindeki her noktanın, M ve N uçlarına eşit uzaklıkta olduğunu gösteriniz.

Açıklama :

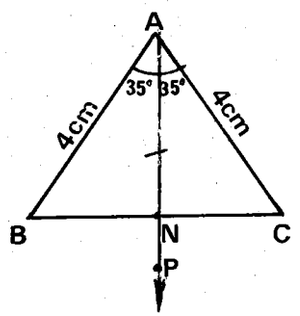
[MN] nın, D orta noktasını bulmak için, pergeli [MN] nın yarı uzunluğundan fazla açınız. (Örneğin, 3 cm) açıklığı bozmadan, M ve N merkezli çemberleri çiziniz. Bu iki çemberin kesim noktalarından geçen XY doğrusu ile [MN] nın kesişimi, D orta noktası olur.

Dik açı tanımından, (K. A. K.) özeliğinden ve eş üçgenlerde eş olan açılar karşısında, eş kenarlar bulunduğundan yararlanınız.

6. | EF | = 8 cm, | MN | = 6 cm olan [EF] ve [MN] doğru parçaları birbirlerini P noktasında ortalıyor. $\widehat{PEM} \cong \widehat{PFN}$ olduğunu gösteriniz.

Yol gösterme : Ters açıların eşitliğinden yararlanınız.

7. 11. Şekildeki $\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgeninde, s $(\widehat{BAC}) = 70°$, | AB | = | AC | = 4 cm ve $\widehat{BAC}$ nın açı ortayı, [BC] kenarını N noktasında kesiyor.



11. Şekil

a) Bu çizimi yapınız.

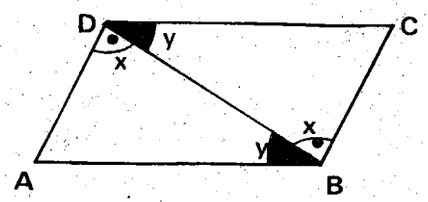
b) $\widehat{ABN} \cong \widehat{ACN}$ dir. Niçin?

c) AP doğrusu, [BC] nın orta dikmesidir. Niçin?

d) s $(\widehat{ANB})$ + s $(\widehat{ANC}) = 180°$ dir. Niçin?

e) Her ikizkenar üçgende, tepeye ait açıortayı ile tabana ait yükseklik ve kenar ortayı için ne diyebilirsiniz?

8. 12. Şekildeki dörtgende,
$\widehat{ADB} \cong \widehat{CBD}$ ve $\widehat{ABD} \cong \widehat{CDB}$ dir.



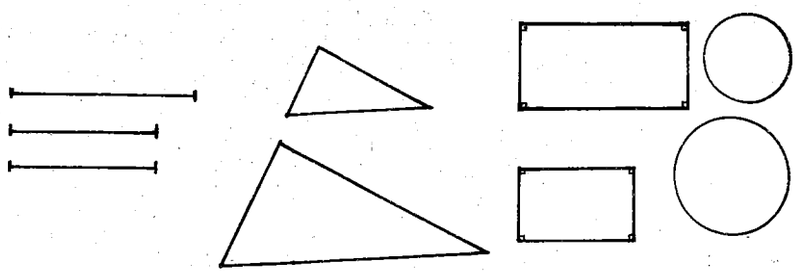
12. Şekil

a) [AB] ≅ [CD] ve [AD] ≅ [BC] olduğunu gösteriniz.

b) $\widehat{A} \cong \widehat{C}$ ve $\widehat{B} \cong \widehat{D}$ olduğunu gösteriniz.

3–2.5. Benzerlik Kavramı

Ülkemizin farklı ölçeklerde yapılan haritalarının, bir insanın aynı negatiften çekilmiş farklı büyüklükteki fotoğraflarının benzer olduklarını, sezgimizle söyleyebiliriz.

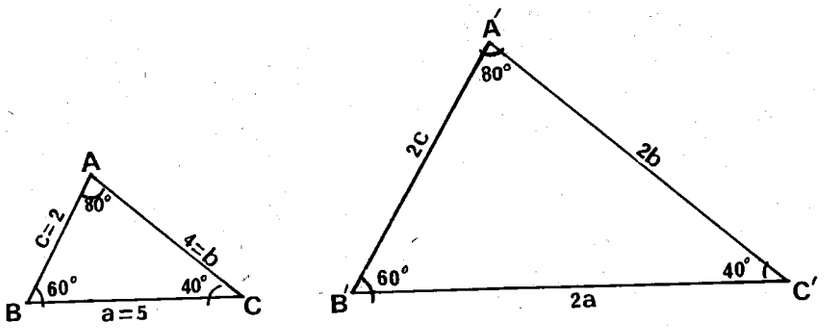


13. Şekil

13. Şekilde gördüğünüz gibi, üç doğru parçasının, iki üçgenin, iki dikdörtgenin, iki çemberin büyüklükleri farklı olabildiği halde; benzer olduklarını, yine sezgimizle söyleyebiliriz. Önce, üçgenler kümesi üzerinde benzerlik bağıntısını inceleyelim.

3–2.6. Üçgenlerin Benzerliği

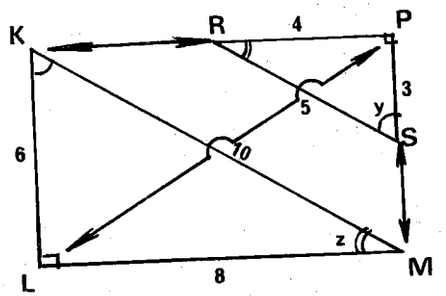
Üçgenlerin köşeleri arasında bir "bire–bir" eşlemenin yapılabilmesi için bu üçgenlerin mutlaka eş olmaları gerekmez.



14. Şekil

14. Şekilde, $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{A'B'C'}$ üçgenlerini görüyorsunuz. Bu üçgenlerin karşılıklı açıları eşittir. Bu eşitlikler : $\hat{A} \cong \hat{A'}$, $\hat{B} \cong \hat{B'}$, $\hat{C} \cong \hat{C'}$ dür. $\widehat{A'B'C'}$ üçgeninin, kenarlarının herbirinin uzunluğu, $\widehat{ABC}$ üçgeninin karşılık gelen kenarlarının uzunluğunun iki katıdır. Bunlar **"benzer üçgenler"** dediğimiz üçgenlere örnektirler. Şeklimizdeki üçgenler arasındaki eşleme $\widehat{ABC} \leftrightarrow \widehat{A'B'C'}$ biçimindedir.

Tanım : İki üçgenin köşeleri arasında bir bire–bir eşleme verilmiş olsun. Bu eşlemeye göre, üçgenlerin karşılıklı açıları eş ve karşılıklı kenarları orantılı ise, bu eşlemeye **benzerlik** ve bu üçgenlere **benzer üçgenler** denir. $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{A'B'C'}$ üçgenlerinin benzerliği, $\widehat{ABC} \sim \widehat{A'B'C'}$ biçiminde yazılır.



15. Şekil

15. Şekildeki iki üçgeni iyice inceleyiniz. $\widehat{KLM} \sim \widehat{RPS}$ diyebilir miyiz? Cevabımız "hayır" olacaktır. Çünkü;

$$\widehat{KLM} \leftrightarrow \widehat{RPS}$$

eşlemesinde, K ile R karşılıklı açılar oldukları halde, eş değildirler. Bu iki üçgenin köşeleri arasında, 36 tür eşleme yapabiliriz. Yalnız, bu eşlemelerde $\widehat{KLM} \sim \widehat{SPR}$ benzerliğinin gerçeklenmesi koşulu her 6 lık eşleme gurubu için bir tanedir. çünkü; bu eşlemede karşılıklı açıların eş ve karşılıklı kenarların orantılı olması gerekir. Yani,

$$\hat{K} \cong \hat{S},\ \hat{L} \cong \hat{P},\ \hat{M} \cong \hat{R} \text{ ve}$$

$\frac{|KL|}{|SP|} = \frac{|LM|}{|PR|} = \frac{|KM|}{|SR|} = 2$ dir. Öyleyse, $KLM \sim SPR$ yazabiliriz.

Uyarı : Üçgenlerin benzerliği için yaptığımız tanım, çokgenlerin benzerliğine de uygulanır.

Sorular :

1. $\widehat{EFG} \sim \widehat{PRS}$ veriliyor.

a) Eş açıları yazınız.

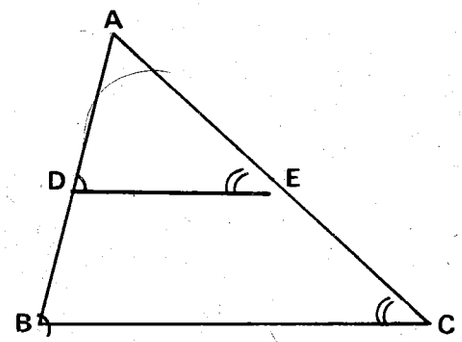
b) Karşılıklı kenarlar arasındaki orantıları yazınız.

2. $\widehat{KLM} \cong \widehat{XYZ}$ veriliyor.

a) $\widehat{KLM} \sim \widehat{XYZ}$ dir; niçin?

b) Karşılıklı kenarlar arasındaki oran 1 dir; niçin?

3–2.7. Üçgenlerde Temel Benzerlik Özeliği



16. Şekil

16. Şekilde, [DE] // [BC] çizilerek, $\widehat{ABC}$ içinde, $\widehat{ADE}$ elde edilmiştir. İşte, bunun gibi bir üçgenin bir kenarına paralel bir doğru, üçgenin diğer kenarlarını (veya bu kenarları taşıyan doğruları) farklı noktalarda keserse, elde edilen yeni üçgen, verilen üçgene benzerdir.

Buna göre, şeklimizdeki $\widehat{ABC} \sim \widehat{ADE}$ dir. Öyleyse, $\hat{A} \cong \hat{A}$ (bu duruma özeşlik denir),

$B \cong D$, $C \cong E$ (1) ve

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|} \frac{|AC|}{|AE|} \quad (2) \text{ olur.}$$

Not : Bu kurala, **"Temel Benzerlik Teoremi"** denir ve isbatı Lise 2. sınıfta yapılacaktır. (1). koşul varsa, (2). koşulun varlığı; tersine (2). varsa, (1). koşulun varlığı ispatlanabilir. Bu açıklamadan sonra, üçgenlerin benzerliğinin tanımında, bu koşullardan yalnız birini kullanacağız.

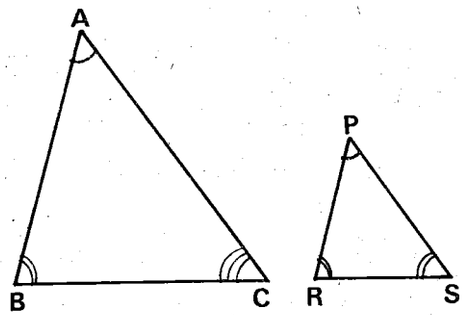
3–2.8. "A.A.A." Benzerlik Özeliği

İki üçgen arasında, bir bire–bir eşleme verilsin. Eğer, karşılıklı açılar eş ise, bu eşleme bir benzerliktir. (Karşılıklı ikişer açıları eş olan iki üçgenin, üçüncü açıları da eş olacağından, karşılıklı ikişer açıları eş olan iki üçgen benzer olur. O halde bu özelik kısaca **"A.A."** ile de belirtilebilir).

Başka bir deyişle, 17. Şekilde gördüğünüz gibi, iki üçgen arasında $ABC \leftrightarrow PRS$ eşlemesi verildiğinde; eğer,

$\hat{A} \cong \hat{P}$, $\hat{B} \cong \hat{P}$ ve $\hat{C} \cong \hat{S}$ ise;

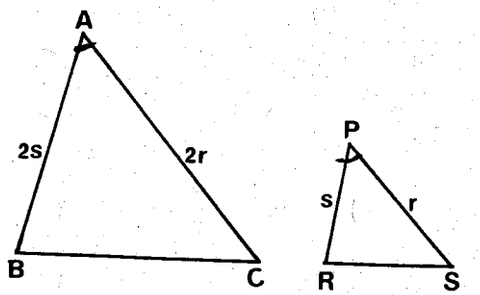
$\widehat{ABC} \sim \widehat{PRS}$ dir.



17. Şekil

3–2.9. "K.A.K." Benzerlik Özeliği

İki üçgen arasında, bir bire - bir eşleme verilmiş olsun. Eğer, karşılıklı ikişer kenarlar orantılı ve bunların oluşturduğu açılar eş ise, verilen eşleme bir benzerliktir.



18. Şekil

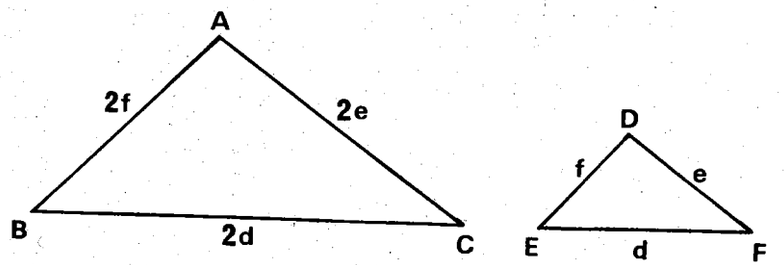
Başka bir deyişle, 18. şekilde gördüğünüz gibi, iki üçgen arasında $ABC \leftrightarrow PRS$ verilmiş olsun. Eğer,

$$\frac{|AB|}{|PR|} = \frac{|AC|}{|PS|} \text{ ve } \hat{A} \cong \hat{P} \text{ ise;}$$

$\widehat{ABC} \sim \widehat{PRS}$ dir.

3–2.10. "K.K.K." Benzerlik Özeliği

İki üçgen arasında, bir eşleme verilmiş olsun. Eğer karşılıklı kenarlar orantılı ise, bu eşleme bir **benzerliktir.**



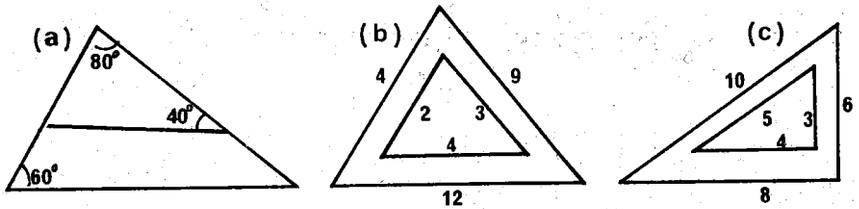
19. Şekil

Başka bir deyişle, $\widehat{ABC} \leftrightarrow \widehat{DEF}$ verilmiş olsun. Eğer,

$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}$ ise, $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ dir. (19. Şekil).

ALIŞTIRMALAR

1. 20. Şekilde verilen üçgen çiftlerinin, benzer olup olmadıklarını araştırınız.



20. Şekil

2. İki üçgen arasında $ABC \leftrightarrow PRS$ eşlemesi veriliyor. $s(\hat{A}) = 75°$ $|AB| = 4$, $|AC| = 6$ cm ve $s(\hat{P}) = 75°$, $|PR| = 6$ cm, $|PS| = 9$ cm dir. Bu eşleme, bir benzerlik midir?

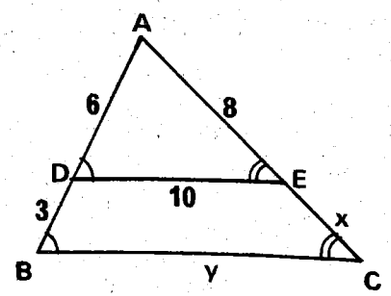
3. Kenar uzunlukları, aşağıda belirtilen üçgenlerin benzer olup olmadıklarını araştırınız ve her benzer çift için kenarları arasındaki oranları ve eşlemeleri yazınız.

a) $|AB| = 5$, $|AC| = 3$, $|BC| = 7$
$|DE| = 10$, $|DF| = 6$, $|EF| = 14$

b) $|AB| = 20$, $|AC| = 35$, $|BC| = 30$
$|KL| = 6$, $|KM| = 7$, $|LM| = 4$

c) $|AB| = 2$, $|AC| = 1{,}2$, $|BC| = 1{,}6$
$|PR| = 0{,}3$, $|PS| = 0{,}4$, $|RS| = 0{,}5$

4. 21. Şekilde, [DE] // [BC] dir. x ve y uzunluklarını bulunuz. (C : $x = 4$, $y = 15$).



21. Şekil

Açıklama :

Temel benzerlik özeliğine göre,

$\widehat{ADE} \sim \widehat{ABC}$ dir. Buradan,

$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|}$ ve $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BC|}$

orantıları yazılabilir.

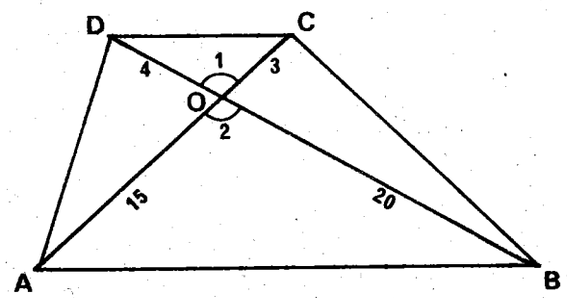
Bu orantılarda, şekildeki verilen değerler yerine konursa :

$$\frac{6}{9} = \frac{8}{8+x} \text{ ve } \frac{6}{9} = \frac{10}{y} \text{ olur.}$$

5. 22. Şekildeki ABCD dörtgeni bir yamuktur. "Karşılıklı iki kenarı paralel olan, diğer kenarları paralel olmayan dörtgene yamuk denir. Paralel olan kenarlara, yamuğun **tabanları** paralel olmayan kenarlara da yanal **kenarlar** adı verilir".

a) $\widehat{ODC} \leftrightarrow \widehat{OBA}$ eşlemesi, bir benzerlik midir?

b) Bu yamukta, tabanların oranı nedir? $\left(\text{Cevap : } \frac{1}{5}\right)$.



22. Şekil

Açıklama :

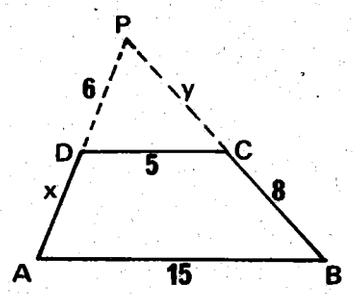
22. Şekilde,

a) $\widehat{ODA} \leftrightarrow \widehat{OBA}$ eşlemesine göre : $\widehat{O}_1$ ile $\widehat{O}_2$, [OD] ile [OB] ve [OC] ile [OA] nın eşlenebilecekleri anlaşılır.

Burada, $O_1 \cong O_2$ (Ters açılar), $\frac{|OD|}{|OB|} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ ve

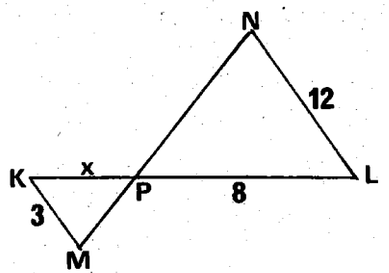
$\frac{|OC|}{|OA|} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ olduğundan, $\frac{|OD|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OA|}$ orantısı yazılabilir.

Öyleyse, **"K.A.K."** benzerlik özeliğine göre, $\widehat{ODC} \sim \widehat{OBA}$ olup, $\widehat{ODC} \leftrightarrow \widehat{OBA}$ eşlemesi benzerlik olur mu?



23. Şekil

6. 23. Şekilde, ABCD bir yamuktur. Bu şekildeki x ve y ile gösterilen uzunlukları bulunuz : (Cevap : $x = 12$, $y = 4$).

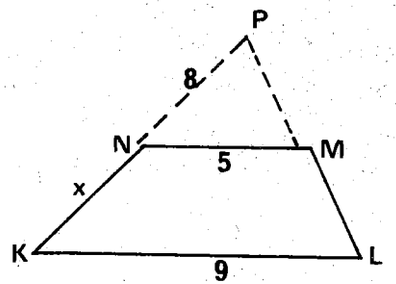


24. Şekil

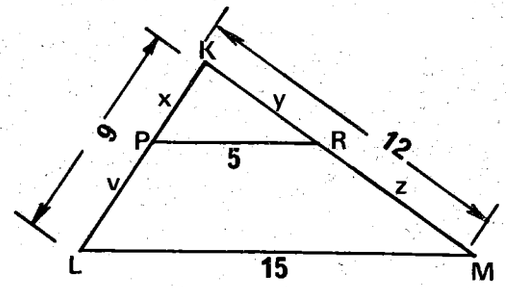
7. 24. Şekilde, [KM] // [LN] dir. x ile gösterilen doğru parçasının uzunluğunu bulunuz. (Cevap : 2).

8. Bir $\widehat{ABC}$ üçgeninin kenarlarının uzunlukları a = 12 cm, b = 8 cm, c = 10 cm dir. [AC] kenarı üzerinde, |AE| = 2 cm olmak üzere alınan E noktasından, diğer kenarlara iki paralel çiziliyor. Meydana gelen paralelkenarın çevresini bulunuz. (Cevap : 21 cm).

9. 25. Şekilde, KLMN dörtgeni bir yamuktur. Yani, [MN] // [KL] dir. Bu şekildeki x uzunluğunu bulunuz. (Cevap : 6,2).

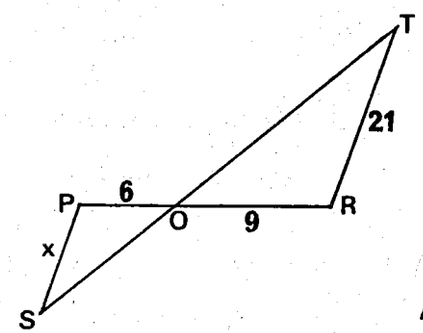


25. Şekil

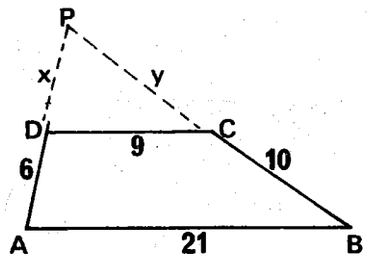


26. Şekil

10. 26. Şekilde, [PR] // [LM] dir. x, v, y, z uzunluklarını bulunuz. (Cevap : $x = 3$, $v = 6$, $y = 4$, $z = 8$).



27. Şekil



28. Şekil

11. 27. Şekilde [PS] // [RT] dir. x uzunluğunu bulunuz. (Cevap : 14).

12. 28. Şekildeki yamuğun ([AB] // [CD]) tabanlarının uzunlukları, 21 cm, 9 cm ve yanal kenarlarının uzunlukları 6 cm, 10 cm dir. Yanal kenarları taşıyan doğruların kesim noktasının, küçük tabanın köşelerine olan uzaklıklarını bulunuz.

(Cevap : x = 4,5 cm, y = 7,5 cm).

13. 29. Şekilde, tabanlarının uzunlukları 9 cm, 3 cm ve köşegenlerinin uzunlukları 8 cm, 16 cm olan bir yamuğun, köşegenlerinin birbirlerinden ayırdığı parçaların uzunluklarını bulunuz.

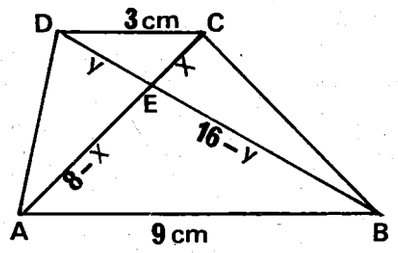
(Cevap : x = 2 cm, y = 4 cm).

Açıklama :

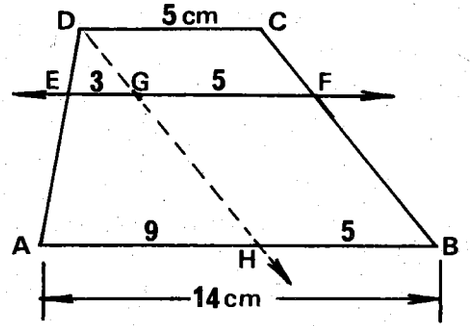
ABCD yamuğunda, [AB] // [CD] olduğundan, temel benzerlik özeliği gereği; $\widehat{ECD} \sim \widehat{EAB}$ dir. Öyleyse,

$\frac{|EC|}{|EA|} = \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{|ED|}{|EB|}$ orantısında 29. Şekildeki değerler yerine konulursa :

$$\frac{x}{8-x} = \frac{3}{9} \text{ ve } \frac{y}{16-y} = \frac{3}{9} \text{ olur.}$$



29 Şekil



30. Şekil

14. 30. şekildeki ABCD yamuğunun tabanlarının uzunluğu | AB | = 14 cm ve | DC | = 5 cm dir. Tabanlara paralel bir doğrunun, yanal kenarlar arasında kalan doğru parçasının uzunluğu | EF | = 8 cm olduğuna göre, | EF | doğru parçası, yanal kenarları hangi oranda böler?

Açıklama :

30. Şekilde gördüğünüz gibi, D köşesinden, [CB] kenarına çizilen paralel, [EF] nı G, [AB] kenarını da, H de kessin. O zaman; DGFC, GHBF ve DHBC dörtgenleri paralelkenar olur. "Karşılıklı kenarları

paralel olan dörtgene paralelkenar denir. Paralelkenarda karşılıklı kenarlar eşittir".

Buradan, | DC | = | GF | = | HB | = 5 cm olur. Öte yandan,
| EG | = | EF | — | GF | = 8 — 5 = 3 cm ve
| AH | = | AB | — | HB | = 14 — 5 = 9 cm bulunur.

$\widehat{DAH}$ de, [EG] // [AH] (Verildi) olduğundan, $\widehat{DEG} \sim \widehat{DAH}$ (Temel benzerlik özeliği) olup; $\frac{|DE|}{|DA|} = \frac{|DG|}{|DH|} = \frac{|EG|}{|AH|} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ olur.

DGFC paralelkenarında, | DG | = | CF | ve DHBC paralelkenarında, | DH | = | CB | olduğundan, bu değerler yukarıdaki orantıda yerlerine konursa :

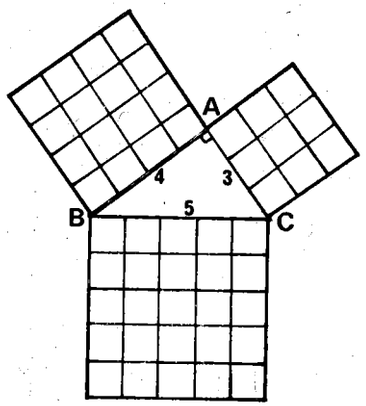
$$\frac{|DE|}{|DA|} = \frac{|CF|}{|CB|} = \frac{1}{3}$$

olduğu görülür. O halde, [EF] doğru parçası yanal kenarları $\frac{1}{3}$ oranında böler mi?

15. Bir $\widehat{ABC}$ üçgeninin kenarlarının uzunlukları a = 15 cm, b = 9 cm ve c = 18 cm dir. [AB] kenarına çizilen paralel bir doğrunun, diğer kenarlar arasında kalan parçasının uzunluğu 6 cm olduğuna göre, bu paralelin diğer kenarlar üzerinde ayırdığı doğru parçalarının uzunluklarını bulunuz. (Cevap : 5 cm, 3 cm).

3-3. DİK ÜÇGENLER PİSAGOR VE ÖKLİT BAĞINTILARI

3-3.1. Pisagor (Pythagoras) Bağıntısı



31. Şekil

31. Şekildeki, $\widehat{ABC}$ dik üçgeninin [AB] ve [AC] kenarlarına **dik kenarlar**, [BC] kenarına da **hipotenüs** denildiğini biliyorsunuz. Şekildeki her küçük **birim kare** birbirine eştir. Kenarı [AB] olan kare içindeki birim karelerin ($4^2 = 16$ birim kare) sayısı ile kenarları [AC] olan kare içindeki birim karelerin ($3^2 = 9$ birim kare) sayısı toplamının ($16 + 9 = 25$ birim kare); kenarı [BC] hipotenüsü olan karenin içindeki birim karelerin ($5^2 = 25$ birim kare) sayısına eşit olduğunu görüyorsunuz. Buna göre :

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$$

ya da

$$c^2 + b^2 = a^2$$

yazılır.

Bu bağıntıya, Pisagor (Pythagoras) bağıntısı denir. Bir dik üçgen de, dik kenarların uzunluklarının kareleri toplamı hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir diye ifade edilir.

Siz de, $s(\widehat{C}) = 90°$, $|BC| = 6$ cm, $|AC| = 8$ cm olan, $\widehat{ABC}$ üçgenini çiziniz. [AB] kenarının uzunluğunu ölçünüz. 10 cm buldunuz mu? Gerçekten, Pisagor bağıntısına göre :

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 = 6^2 + 8^2$$
$$|AB|^2 = 36 + 64 = 100$$
$$|AB| = \sqrt{100} = 10 \text{ cm olur.}$$

Uygulamalar :

1. 32. Şekildeki, ABCD dikdörtgeninde; $e^2 = a^2 + b^2$ dir.

a) $|AC| = e$ köşegeninin uzunluğu

Örneğin, $a = 15$ cm, $b = 8$ cm için;

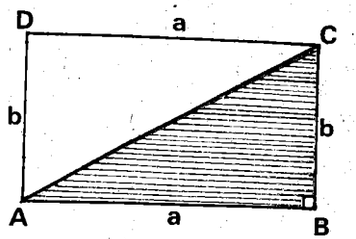
$$e^2 = 15^2 + 8^2 + 225 = 64 = 289$$
$$e = \sqrt{289} = 17 \text{ cm dir.}$$

b) $|AB| = a$ kenarının uzunluğu,

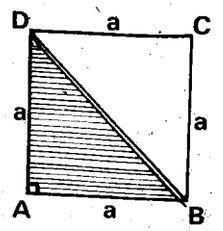
$$a^2 = b^2 = e^2 \Rightarrow a^2 = e^2 - b^2 \text{ dir.}$$

Örneğin, $e = 13$ cm, $b = 5$ için;

$$a^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$$
$$a = \sqrt{144} = 12 \text{ cm dir.}$$



32. Şekil



33. Şekli

2. 33. Şekildeki, ABCD karesinde :

a) $|BD| = e$ köşegeninin uzunluğu,

$$e^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \text{ ve}$$
$$e = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} \text{ dir.}$$

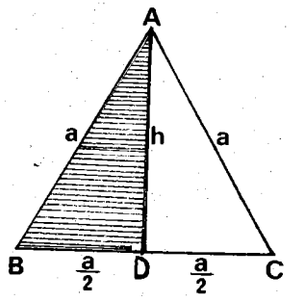
Örneğin, $a = 5$ cm için; $e = 5\sqrt{2}$ cm dir.

b) $|AB| = a$ kenarının uzunluğu,

$$2a^2 = e^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{e^2}{2} \text{ ve } a = \sqrt{\frac{e^2}{2}} \text{ dir.}$$

Örneğin, $e = 6$ cm için;

$$a = \sqrt{\frac{36}{2}} = \sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2} \text{ cm dir.}$$



34. Şekil

3. 34. Şekildeki $\widehat{ABC}$ eşkenar üçgeninde [AD] ⊥ [BC] çizildiğinde, $|BD| = |DC| = \frac{a}{2}$ olduğunu biliyorsunuz. O halde, bir kenar uzunluğu a olan bir eşkenar üçgenin, h yüksekliğini bulabilir miyiz?

$\widehat{ABD}$ dik üçgeninde,

$|AD|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 \Rightarrow |AD|^2 = |AB|^2 - |BD|^2$ dir.

Buradan

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3} \text{ olur.}$$

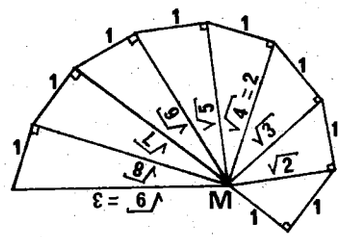
Örneğin, $a = 6$ cm için; $h = \frac{6}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ cm dir.

Yüksekliği verilen eşkenar üçgenin, bir kenar uzunluğunu veren bağıntıyı da siz bulunuz. Bulduğunuz bu bağıntıyı, bir örnekle gerçekleyiniz.

4. 35. Şeklin, nasıl meydana geldiğini izleyiniz. Bu şeklin, oluşum yönteminden yararlanarak :

$$\sqrt{10},\ \sqrt{11},\ \sqrt{12},\ \sqrt{13},\ \sqrt{14},\ldots$$

sayılarını bulabilir misiniz?



35. Şekil

Açıklama :

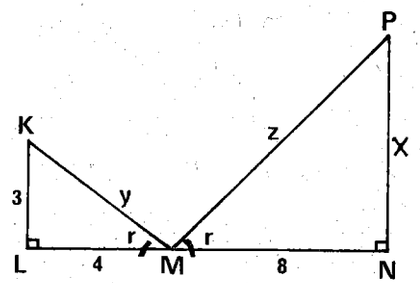
$\sqrt{13} = |MX|$ olsun.

$$|MX|^2 = (\sqrt{12})^2 + 1^2 = 12 + 1 = 13$$

$$|MX|^2 = 13 \Rightarrow |MX| = \sqrt{13} \text{ olur.}$$

ALIŞTIRMALAR

1. 36. Şekilde, x, y ve z ile gösterilen doğru parçalarının uzunluklarını bulunuz. (Cevap : $x = 6$, $y = 5$, $z = 10$).



36. Şekil

Açıklama :

Birer dar açıları eş olan dik üçgenlerin, üçüncü açıları da eş olacağından (36. Şekilde).

$$s(\widehat{K}) = s(\widehat{P}) = (90° - r°),\ \text{“A.A.A.”}$$

benzerlik özeliğine göre,

$\widehat{KLM} \sim \widehat{PNL}$ dir. Buradan, $\frac{3}{4} = \frac{x}{8}$ yazılabilir.

2. Aşağıdaki sayı kümelerinden hangilerinin elemanları, bir dik üçgenin uzunlukları olabilir?

a) 15, 36, 39 b) 0,9; 4; 4,1 c) 10, 24, 26

b) 17,5; 14; 10,5 e) 4,5; 6; 7,6 f) 22; 17,6; 13,2

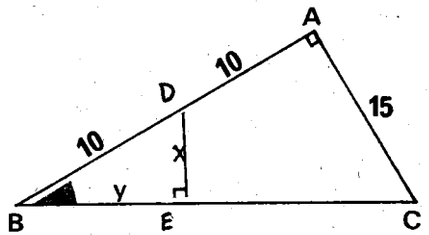
3. Dik kenarından biri 12 cm ve hipotenüsü 12 cm olan bir dik üçgenin diğer dik kenarını bulunuz. (Cevap : 5 cm).

4. Bir ikizkenar üçgenin taban kenarının uzunluğu 16 cm ve bu tabana ait yüksekliğin uzunluğu 15 cm dir. Bu ikizkenar üçgenin, eş kenarlarının uzunluğunu bulunuz. (Cevap : 17 cm).

5. Bir $\widehat{ABC}$ üçgeninde, $|BA| = |BC| = 13$ cm, $|AC| = 10$ cm dir.

[AC] kenarına, B köşesinden inilen [BH] dikmesinin uzunluğunu bulunuz. (Cevap : 12 cm).

6. 37. Şekilde, $|BC|$, $|DE|$, $|EC|$ uzunluklarını bulunuz. (Cevap : $x = 6$, $y = 8$).



37. Şekil

Yol gösterme :

$$\left.\begin{array}{l} s(\widehat{A}) = s(\widehat{E}) = 90^\circ \\ B \cong B \text{ (özeşlik).} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{EBD} \sim \widehat{ABC} \text{ (A.A.A. benzerlik özeliği).}$$

Buradan,

$$\frac{|ED|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|BC|} \text{ ve } \frac{|EB|}{|AB|} = \frac{|BD|}{|BC|}$$

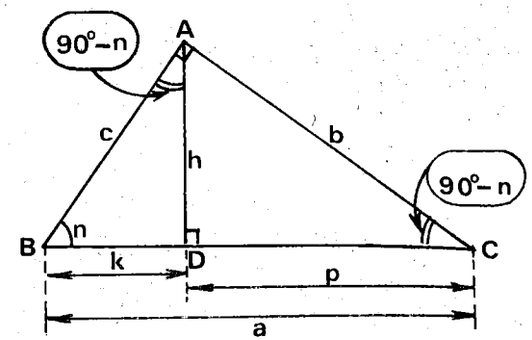
yazılabildiğini görürüz.

7. Bir $\widehat{ABC}$ dik üçgeninin, hipotenüsü 30 cm dir. Dik kenarlarının uzunlukları, 3 ve 4 ile orantılıdır. Bu dik üçgenin, dik kenarlarının uzunluklarını bulunuz. (Cevap : $a = 18$ cm, $b = 24$ cm).

Hipotenüsü 5 ile orantılı olması gerekir $30 : 5 = 6$ cm. $3 \times 6 = 18$, $4 \times 6 = 24$ olur

Yol gösterme :

$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4a = 3b$ eşitliğinden yararlanınız.



38. Şekil

38. Şekildeki $\widehat{ABC}$ üçgeninde,

$s(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ ve $[AD] \perp [BC]$ dir.

Bu şekilde :

a) $s(\widehat{ABD}) = s(\widehat{ABD}) = 90^\circ$ (çizimden).

b) $\left.\begin{array}{l} s(\widehat{BAD}) = 90^\circ - n^\circ \\ s(\widehat{BCA}) = 90^\circ - n^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow s(\widehat{BAD}) = s(\widehat{BCA})$ olur.

O halde, (A.A.A.) özeliğine göre;

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DBA} \sim \widehat{DAC}$ dir.

Buradan,

1. $\widehat{DBA} \sim \widehat{DAC} \Rightarrow \frac{|DA|}{|DC|} = \frac{|DB|}{|DA|} \Leftrightarrow |DA|^2 = |DB| \cdot |DC|$

ve kısaca,

$$\frac{h}{p} = \frac{k}{h} \Leftrightarrow h^2 = k.p$$

dir.

Sonuç 1 : Bir dik üçgende, hipotenüse ait yükseklik, hipotenüsten ayırdığı parçalar arasında orta orantılıdır.

Buna, dik üçgenlerde, **Öklit'in yükseklik bağıntısı denir.**

$$2.\ \widehat{ABC} \sim \widehat{DBA} \Leftrightarrow \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|AB|} \Leftrightarrow |AB|^2 = |BC| \,.\, |BD|$$

ve kısaca,

$$\frac{c}{k} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow c^2 = a.k$$

dir.

$$3.\ \widehat{ABC} \sim \widehat{DAC} \Leftrightarrow \frac{|AC|}{|DC|} = \frac{|BC|}{|AC|} \Leftrightarrow |AC|^2 = |BC| \,.\, |DC|$$

ve kısaca,

$$\frac{b}{p} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b^2 = a.p$$

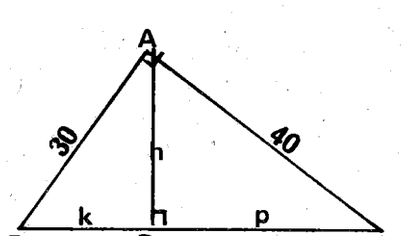
dir.

Sonuç 2 : Bir dik üçgende, her dik kenar, yüksekliğin hipotenüs üzerinde ayırdığı parçalardan, kendi yanındaki parça ile hipotenüs arasında orta orantılıdır.

Buna, dik üçgenlerde, **Öklit'in dik kenar bağıntısı** denir.

Uygulamalar :

1. 39. Şekildeki dik üçgende, [AD] yüksekliktir. Verilen uzunluklar yardımıyla a, k, p ve h uzunluklarını bulunuz.



39. Şekil

Çözüm :

a) $\widehat{ABC}$ dik üçgeninde, Pisagor bağıntısına göre;

$$a^2 = 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500$$

$$a = \sqrt{2500} = 50 \text{ dir.}$$

b) Öklit'in dik kenar bağıntısına göre;

$$50.\ k = 30^2 \Leftrightarrow k = \frac{900}{50} = 18 \text{ dir.}$$

c) $p = a - k = 50 - 18 = 32$ dir.

d) Öklit'in yükseklik bağıntısına göre :

$$h^2 = 18.32 = 576 \Leftrightarrow h = \sqrt{576} = 24 \text{ tür.}$$

2. 40. Şekildeki dik üçgende, [AH] yüksekliktir. Verilen uzunluklar yardımıyla bilinmeyen uzunlukları bulunuz.

Çözüm :

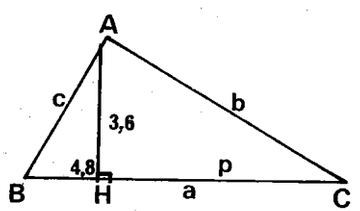
a) $4{,}8 \,.\, p = (3{,}6)^2$

$$p = \frac{12{,}96}{4{,}8} = 2{,}7 \text{ dir.}$$

b) $a = 4{,}8 + 2{,}7 = 7{,}5$ tir.

c) $c^2 = 4{,}8 \,.\, 7{,}5 = 36 \Leftrightarrow c = 6$ dır.

d) $b^2 = 2{,}7 \,.\, 7{,}5 = 20{,}25 \Leftrightarrow b = 4{,}5$ tir.

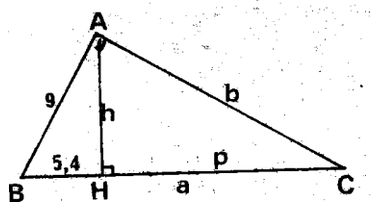


40. Şekil

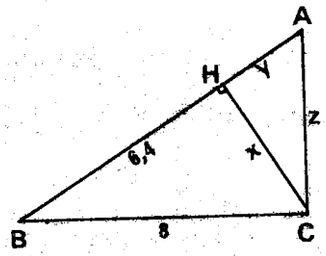
ALIŞTIRMALAR

1. s $(\widehat{A}) = 90°$ olan $\widehat{ABC}$ dik üçgeninde b = 20 cm, yüksekliği h = cm dir. Bu dik üçgende, a hipotenüsünü, c dikkenarını ve yüksekliğin tabandan ayırdığı parçaları bulunuz. (Cevap : a = 25 cm, c = 15 cm, k = 9 cm, p = 16 cm).

2. 41. Şekildeki dik üçgende, verilenler yardımıyla bilinmeyenleri bulunuz. (Cevap : h = 7,2, p = 9,6, a = 15, b = 12).



41. Şekil



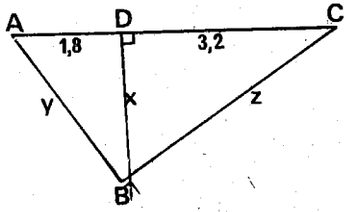
42. Şekil

3. 42. Şekildeki, dik üçgende, bilinmeyenleri bulunuz.

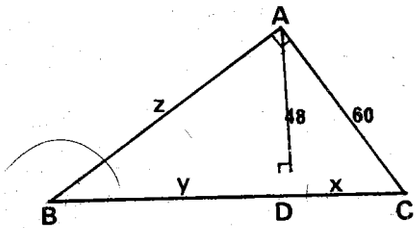
(Cevap : x = 4,8, y = 3,6, z = 6).

4. 43. Şekildeki, dik üçgende bilinmeyenleri bulunuz.

(Cevap : x = 2,4, y = 3, z = 4).



43. Şekil



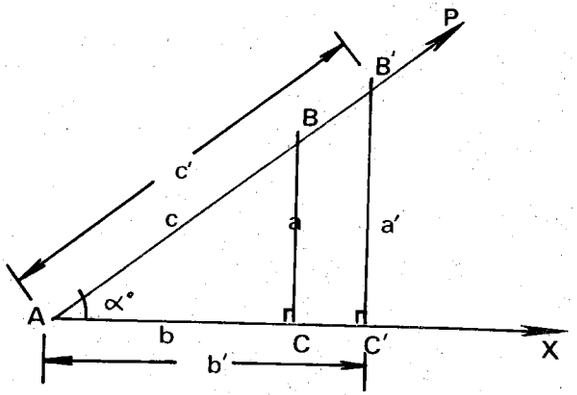
44. Şekil

5. 44. Şekildeki, dik üçgende, bilinmeyenleri bulunuz.

(Cevap : y = 64, z = 80).

3–4. TRİGONOMETRİK ORANLAR

45. Şekilde, $\widehat{PAX}$ açısının, [AP ışınını ele alalım. Bu ışın üzerindeki B ve B′ noktalarından, gönye ile [AX ışınına, [BC] ve [B′ C′]



45. Şekil

dikmelerini inelim. Böylece, elde ettiğimiz $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{AB'C'}$ dik üçgenleri benzerdir. Bu benzer üçgenlerde : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ olacağını biliyorsunuz. Burada, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ orantısında, ortaların yerleri değiştirilirse; $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ elde edilir. Bunlar gibi, $\widehat{PAX}$ açısı değiştirilmemek üzere, [AP ışını üzerindeki her noktadan, [AX ışınına dikmeler inilerek elde edilen her dik üçgende, $\frac{a}{b}$ aynı oranı olur. Başka bir deyimle, $\frac{a}{b}$ oranı yalnız $\widehat{PAX}$ açısına bağlı olup noktaların, ışın üzerindeki yerine bağlı değildir. Bu orana, $\widehat{ABC}$ dik üçgeninde, $\widehat{BAC}$ dar açısının **"tangent"i (tan)** denir. (tanjant diye okunur). Buna göre,

$$\tan A = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\text{Karşı dik kenarın uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenarın uzunluğu}}$$

ya da kısaca,

$$\tan A = \frac{a}{b} \text{ biçiminde yazılır.}$$

Bu, $\frac{a}{b}$ oranının tersi olan $\frac{b}{a}$ oranına, $\widehat{BAC}$ dar açısının **"co—tangent'i (cot)** (kontanjant diye okunur) denir. Buna göre,

$$\cot A = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\text{Komşu dik kenarın uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenarın uzunluğu}}$$

ya da kısaca,

$$\cot A = \frac{b}{a} \text{ biçiminde yazılır.}$$

Yine, $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$ ve $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$ olduğundan, $\widehat{PAX}$ açısı değiştirilmemek üzere, [AP ışını üzerindeki her noktadan, [AX ışınına dikmeler inilerek elde edilen her dik üçgende, $\frac{a}{c}$ ve $\frac{b}{c}$ oranları da aynı olur. $\widehat{ABC}$ dik üçgeninde, $\frac{a}{c}$ oranına, $\widehat{BAC}$ dar açısının **"sinüs"ü (sin)** ve $\frac{b}{c}$ oranına da, $\widehat{BAC}$ açısının **"cosinüs"ü (cos)** denir.

Bunlara göre :

$$\sin A = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{\text{Karşı dik kenarın uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün uzunluğu}} \left(\sin A = \frac{a}{c}\right)$$

ve

$$\cos A = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\text{Komşu dik kenarın uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün uzunluğu}} \left(\cos A = \frac{b}{c}\right)$$

biçimnide yazılır.

İşte, bu dört orana, $\widehat{ABC}$ dik üçgeninde, A dar açısının **trigonometrik oranları** denir.

3–4.1. Önemli Açıların Troginometrik Oranları

30° , 45° . 60° lik açıların, trigonometrik oranlarının değerleri,

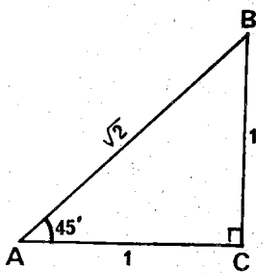
1. 46. Şekildeki, $\widehat{ABC}$ ikizkenar dik üçgeninde, dik kenarların uzunlukları 1 birim olarak alınmıştır. Bu üçgende, Pisagor bağıntısına göre :

$$|AB|^2 = 1^2 + 1^2 = 4 \text{ ve } |AB| = \sqrt{2}$$

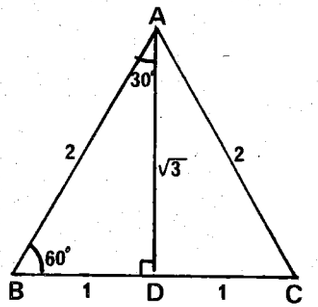
birim uzunluk olur. O halde,

$$\sin 45° = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan 45° = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos 45° = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cot 45° = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1}{1} = 1$$



46. Şekil



47. Şekil

2. 47. Şekildeki, $\widehat{ABC}$ eşkenar üçgeninde, bir kenarın uzunluğu 2 birim olarak alınmıştır. Bu eşkenarlar üçgenin, her iç açısının ölçümünün 60° olduğunu, bir açının açıortayının bu açı karşısındaki kenara dik olduğunu ve bu kenarı ortaladığını biliyorsunuz. O halde, $[AD] \perp [BC]$ çizilirse, $|BD| = |DC| = 1$ birim ve $s(\widehat{BAD}) = 30°$ olur. $\widehat{ABD}$ dik üçgeninde, Pisagor bağıntısına göre :

$$|AD|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 \Rightarrow |AD|^2 = |AB|^2 - |BD|^2$$
$$\Rightarrow |AD|^2 = 4 - 1 = 3$$
$$\Rightarrow |AD| = \sqrt{3} \text{ birim uzunluk}$$

olur.

Buradan :

$$\sin 30° = \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{1}{2} \qquad \sin 60° = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{|BD|}{|AD|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan 60° = \frac{|AD|}{|BD|} = \sqrt{3}$$

$$\cot 30° = \frac{|AB|}{|BD|} = \sqrt{3} \qquad \cot 60° = \frac{|BD|}{|AD|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

olur.

Sonuç : Yukarıda bulduğumuz değerlere göre :

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \tan 45^\circ = \cot 54^\circ = 1$$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

olduğu görülüyor. Bu nedenle, birbirinin tümleri olan (ölçümleri toplamı 90° olan) iki açının :

1. Birinin sinüsü, diğerinin cosinüsüne eşittir.

2. Birinin tangenti, diğerinin cotangentina eşittir.

Örneğin, $\sin 40^\circ = \cos 50^\circ$, $\cos 10^\circ = \sin 80^\circ$, $\tan 20^\circ = \cot 70^\circ$ vb. Aynı biçimde, bu özelik aşağıda göreceğiniz trigonometrik oranlar tablosunda da kullanılmıştır.

TRİGONOMETRİK ORANLAR TABLOSU

Açı (Derecesi)	SİN	TAN	COT	COS	
↓ 1	0,0175	0,0175	57,2900	0,9998	89
2	0,0349	0,0349	28,6361	0,9994	88
3	0,0523	0,0524	19,0811	0,9986	87
4	0,0698	0,0699	14,3007	0,9976	86
5	0,0872	0,0875	11,4300	0,9962	85
6	0,1045	0,1051	9,5144	0,9945	84
7	0,1219	0,1228	8,1443	0,9925	83
8	0,1392	0,1405	7,1154	0,9903	82
9	0,1564	0,1584	6,3138	0,9877	81
10	0,1736	0,1763	5,6713	0,9848	80
11	0,1908	0,1944	5,1446	0,9816	79
12	0,2079	0,2126	4,7046	0,9781	78
13	0,2250	0,2309	4,3315	0,9744	77
14	0,2419	0,2493	4,0108	0,9703	76
15	0,2588	0,2679	3,7321	0,9659	75

16	0,2756	0,2867	3,4874	0,9613	74
17	0,2924	0,3057	3,2709	0,9563	73
18	0,3090	0,3249	3,0777	0,9511	72
19	0,3256	0,3443	2,9042	0,9455	71
20	0,3420	0,3640	2,7475	0,9397	70
21	0,3584	0,3839	2,6051	0,9336	69
22	0,3746	0,4040	2,4751	0,9272	68
23	0,3907	0,4245	2,3559	0,9205	67
24	0,4067	0,4452	2,4260	0,9135	66
25	0,4226	0,4663	2,1445	0,9063	65
26	0,4384	0,4877	2,0503	0,8988	64
27	0,4540	0,5095	1,9626	0,8910	63
28	0,4695	0,5317	1,8807	0,8829	62
29	0,4848	0,5543	1,8040	0,8746	61
30	0,5000	0,5774	1,7321	0,8660	60
31	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	59
32	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	58
33	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	57
34	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	56
35	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	55
36	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	54
37	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	53
38	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	52
39	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	51
40	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	50
41	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	49
42	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	48
43	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	47
44	0,6954	0,9657	1,0355	0,7193	46
45	0,7071	0,1000	1,0000	0,7071	45 ↑
	Cos	Cot	Tan	Sin	Açı (Derece)

Bu tabloda, ölçümleri 1° den 45° ye değin açılar, soldaki sütuna yazılmıştır. Ölçümleri 45° den 89° ye değin açılar da, sağdaki sütunda tablonun altından üst başa doğru yazılmış bulunmaktadır. Tablonun üst başında yazılı olan trigonometrik oranlar, 1° den 45° ye değin açılar için kullanılacaktır. 45° den 89° ye değin açıların trigonometrik oranları da, tablonun alt satırında gösterilmiştir.

1. Örnek :

Sin 40° yi bulmak için, (40° < 45° olduğundan) önce, soldaki açı ölçüsü sütunundan 40° yi bulunuz. Sonra tepesinde, sinüs yazılı sütuna bakınız. Sinüs sütununun 40° lik açının satırı kesiminde, 0,6428 sayısı bulunmaktadır. Dört ondalık basamağa değin doğru olarak, sin 40° ≈ 0, 6428 dir. Yaklaşık işareti (≈), burada dört ondalık basamağa kadar doğruluğu göstermektedir.

2. Örnek :

Cos 50° yi bulmak için, (50° > 45° olduğundan) sağ taraftaki açı ölçüsü sütununa bakınız. Sağdaki sütunu kullanacağınız için, altında cosinüs yazılı sütunu bulunuz. Bu sütunda 50° nin karşısında 0,6428 sayısı bulunmaktadır. Buna göre, onbirdebir yaklaşık değerle cos 50° ≈ 0,6428 dir. Bu sayının, sin 40°'ye eşit olduğuna önemle dikkat ediniz.

Sonuç : Bu tablonun incelenmesinden, bir dik üçgenle, bir dar açının ölçümü 1° den 89° ye değin atarsa;

1) Sinüsü, 0,0175 den 0,9998 e değin artar.
2) Cosinüsü, 0,9998 den 0,0175 e değin azalır.
3) Tangenti, 0,0175 den 57,2900 e değin artar.
4) Cotengenti, 57,2900 dan 0,0175 e değin azalır.
5) Trigonometrik oranların artışı ya da azalışı, açı ile orantılı değildir. Yani, açı, 2, 3, 4,... kat büyüdükçe bu açının sinüsü de 2, 3, 4,... kat büyümez.

Örneğin, sin 80° ≠ 2 sin 40° gibi. (Diğerlerini tablodan bularak, bu eşitsizliği gerçekleyiniz.

Uygulamalar :

1. Aşağıdaki çarpımları bulunuz.

a) 100 . (sin 64°) = ? b) 25 . (cos 35°) = ? c) 0,5 (tan 79°) = ?

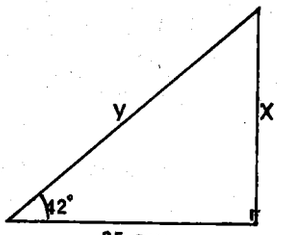
Çözüm :

a) 100. (sin 64°) = 100.0, 8988 = 89,88 dir.

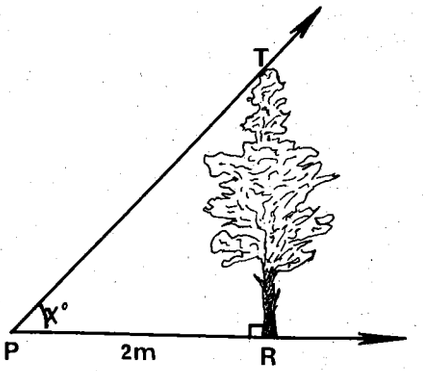
b) 25. (cos 35°) = 25. 0,8192 = 20,48 dir.

c) 0,5 . (tan 79°) = 0,5 . 5,1446 = 2,5723 tür.

2. 48. Şekildeki dik üçgende, dik kenar (x) ile hipotenüsü (y) bulunuz.



48. Şekil



49. Şekil

Çözüm :

$$\frac{x}{25} = \tan 42° \Leftrightarrow x = 25.\ \tan 42°$$

$$\Leftrightarrow x = 25.\ 0{,}9004 = 22{,}51 \text{ cm dir.}$$

$$\frac{25}{y} = \cos 42° \Leftrightarrow y = \frac{25}{\cos 42°} = \frac{25}{0{,}7431} = 33{,}64 \text{ cm dir}$$

3. Yüksekliği 8 m olan bir ağacın, gölgesinin uzunluğu 2 m dir.

a) Güneşin yükseliş açısının "s.$(\widehat{TPR})$" ölçüsünü;

b) Ağacın gölgesi 4 m olursa, $\widehat{TPR}$ açısının ölçüsünü, yaklaşık olarak bulunuz.

Çözüm :

49. Şekilde gördüğünüz gibi, güneşin P noktasına göre yükseliş açısı : P den geçen yatay doğru ile P ve güneşi (ağacın, T tepesini) birleştiren doğru arasındaki TPR açısıdır. Buna göre, TPR bir dik üçgendir.

Bu dik üçgende, $\tan x = \frac{8}{2} = 4$ tür. Trigonometrik oranlar tablosuna bakarsanız. tangenti tam 4 sayısı olan bir açı yoktur. Ancak,

tan 75° = 3,7321, tan 76° = 4,0108 ve tan 77° = 4,3315 tir. O halde, tan x = 4 ⇒ x ≈ 76° dir.

Not : Bu tür açı hesaplamalarının gerçeğe en yakın olanlarının hesaplanmasını, ilerideki sınıflarda göreceksiniz.

b) Ağacın gölgesi, 2 m yerine 4 m olsaydı, $\tan x = \frac{8}{4} = 2$ olurdu.

a) daki düşünüş yöntemiyle tangenti 2 olan x açısını tablodan,

$\tan x = 2 \Rightarrow x \approx 64°$ olarak buluruz.

Uyarı : Bu soruda $2 = \frac{1}{2} \cdot 4$ olduğu halde, $64° \neq \frac{1}{2} \cdot 76°$ olduğuna önemle dikkat ediniz.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki çarpımları bulunuz :

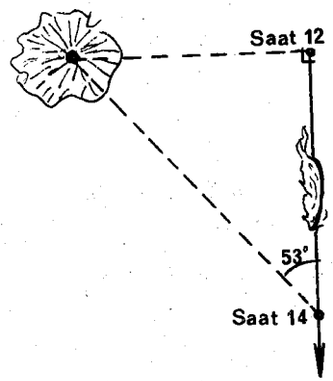
a) 50.(tan 38°) = ? b) 20.(sin 34°) = ? e) 15.(cos 52°) = ?

d) 100.(cot 80°) = ? e) 30.(sin 50°) = ? f) 0,8.(cot 20°) = ?

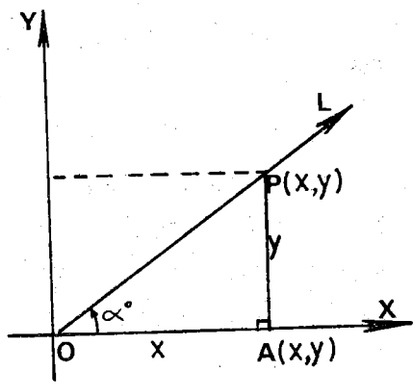
2. Saatta 18,5 mil hızla güneye fdoğru giden bir geminin gözcüsü, saat 12 de tam batılarında bir fener görüyor. Saat 14 te, aynı fenerin yerini, 53° kuzeybatı da tesbit ediyor (50. Şekil)

a) Saat 12 iken, geminin fenere olan uzaklığı kaç mildir?

(Cevap : 49,0099 mil).



50. Şekil



51. Şekil

b) Saat 14 te, geminin fenere olan uzaklığı nedir?

(Cevap : Yaklaşık olarak 61.48 mil).

3–5. BİR DOĞRUNUN EĞİMİ

3–5.1. Başlangıç Noktasından Geçen Doğrunun Eğimi ve Denklemi

51. Şekil, Ortaokul II. sınıfta gördüğünüz **koordinat sistemidir.** Koordinat düzleminde verilen bir noktanın, **apsis** (x) ve **ordinatının** (y) nasıl bulunduğunu biliyorsunuz. Başlangıç noktasından geçen bir ışın [OL olsun. $\widehat{LOX}$ açısının ölçümü aynı kalmak üzere, [OL ışını üzerindeki her P (x, y) noktalarından, [OX ışınına dik inilerek elde edeceğimiz her dik üçgende, $\frac{|PA|}{|OA|} = \frac{y}{x}$ olacağını, "trigonometrik oranlar kesiminde" görmüştük. O halde, böyle bir ışın için, $\frac{y}{x} = m$ diyelim. Burada m, aynı oranın başka bir adıdır. Yine, $\frac{y}{x}$ oranının, [OL ışını ile x ekseninin oluşturduğu $\widehat{LOX}$ açısının tangenti olduğunu öğrenmiştik. Böylece m, $\widehat{POA}$ açısının tangenti olur. m sayısı, başlangıçtan geçen ışına bağlı olup, bu ışının üzerinde alınan bir noktanın seçimine bağlı değildir. $\frac{y}{x} = m$ ifadesine, eşitliğin çarpma özeliğini uygularsak : $\frac{y}{x} \cdot x = m.x$ ve $y = m.x$ olur. $\left(\frac{y}{x} \cdot x = y \cdot \frac{x}{x} = y.1 = y\right.$ dir$\left.\right)$. Öyleyse, $\frac{y}{x} = m$ eşitliğine denk olan denklem, $y = mx$ tir.

Eğer, bir açının tangenti 3 ise, $\frac{y}{x} = 3 \Leftrightarrow y = 3x$ bulunur. Eğer, bir açının tangenti $\frac{4}{5}$ ise, $\frac{y}{x} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow y = \frac{4}{5}x$ olur.

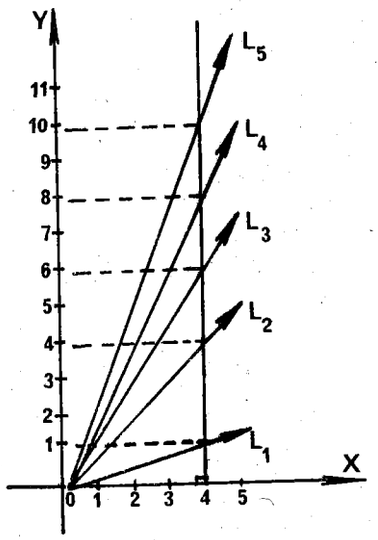
Bir denklem tarafından belirtilen bir doğrunun üzerinde alınan her noktanın koordinatları, bu doğrunun denklemlini gerçekler. Bunun karşıtı olarak, koordinatları bir doğrunun denklemini gerçekleyen her nokta, bu doğru üzerindedir.

Bu denklemdeki x in çarpanı olan sayıya ($y = mx$ biçimindeki bir denklemde, x in katsayısından söz edilmektedir), doğrunun **eğimi** denir. Örneğin, $y = 3x$ denklemindeki "3" sayısı, bu doğrunun eğimidir.

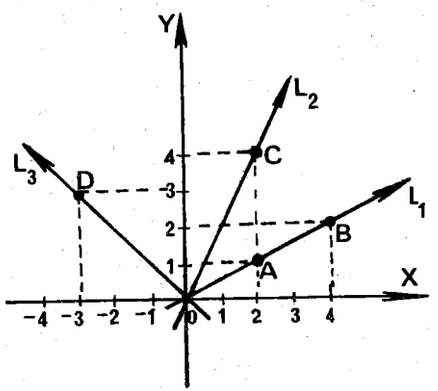
$y = \frac{4}{5}x$ denklemindeki, "$\frac{4}{5}$" eğimdir.

Genel olarak, başlangıç noktasından geçen bir doğrunun denklemi, $y = mx$ biçiminde olup; bu denklemdeki "m" sayısı eğimdir. Başka bir deyimle eğim, başlangıç noktasından geçen bir doğru ile x ekseninin oluşturduğu açının tangentidir. Bu açıya, **doğrunun eğim açısı** denir.

"**Eğitim**" sözcüğü, bir tepe için kullanılırsa, bu tepenin dikleşme durumunu ortaya koyar. Bir tepenin eğimini ölçmek için, tepenin yükseliş ölçüsü buna karşılık gelen yatay ölçüsüne bölünür. Örneğin, 52. Şekilde görülen ışınlar L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 ile gösterilmiştir. Bu ışınların, x ekseniyle yaptığı açıların tangentleri veya ışınların eğimleri, aşağıda her ışın için ayrı ayrı belirtilmiştir.



52. Şekil



53. Şekil

L_1 ışını için, $m = \frac{1}{4} = 0{,}25$

L_2 ışını için, $m = \frac{4}{4} = 1$

L_3 ışını için, $m = \frac{6}{4} = 1{,}5$

L_4 ışını için, $m = \frac{8}{4} = 2$

L_5 ışını için, $m = \frac{10}{4} = 2{,}5$

Uygulamalar :

1. 53. Şekle göre; L_1, L_2, L_3, doğrularının denklemlerini yazınız.

Çözüm :

A (2,1) noktasından geçen L_1 doğrusunun, x ekseniyle oluşturduğu açının tangenti veya L_1 in eğimi, $m_1 = \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$ dir. m_1 in bu değeri, $y = mx$ denkleminde yerine konursa, L_1 in denklemi : $y = \frac{1}{2}x$ olur. Şekilde, B (4,2) noktasını L_1 doğrusu üzerinde görmektesiniz. Yukarıdaki anlatımımıza göre, B nin koordinatları, L_1 in $y = \frac{1}{2}x$ denklemini gerçeklemesi gerekir. Gerçekten, $2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{4}{2} = 2$ dir.

Uyarı : Burada, (2,1) ve (4,2) sıralı ikililerin denk ikililer" $(2,1) \equiv (4,2)$ olduğuna önemle dikkat ediniz.

Yukarıdaki düşünüş yöntemiyle L_2 ve L_3 doğrularının eğimlerinin, $m_2 = \frac{4}{2} = 2$ ve $m = \frac{3}{-3} = -1$ olduklarını görmektesiniz. Bunlara göre,

L_2 nin denklemi; $y = 2x$ ve L_3 ün denklemi de, $y = -x$ olur.

2. 54. Şekilde, TR, bir tepe yamacının eğimini, yaklaşık olarak belirtmektedir. $\widehat{TRS}$ açısının tangenti, yaklaşık olarak 1,6 dır.

a) $\widehat{TRS}$ nın yaklaşık olarak ölçüsü nedir ?

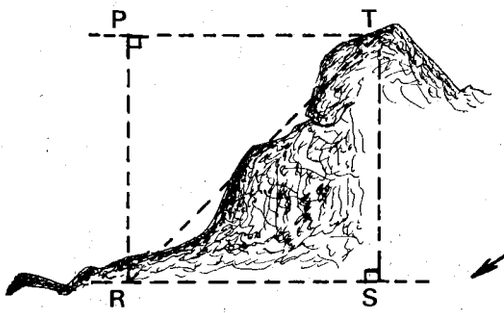
b) $|TP| = 250$ m ise, tepenin yüksekliği, yaklaşık olarak kaç metredir.

Çözüm :

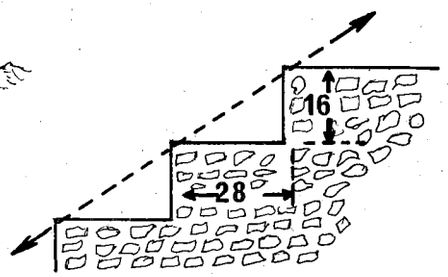
a) $\tan \widehat{TRS} = 1{,}6 \Rightarrow s(\widehat{TRS}) = 58°$ dir. (Tablodan).

b) $|TP| = |RS| = 250$ m dir. (RSTL dikdörtgeninde, karşılıklı kenarlar). O halde, $\widehat{TRS}$ dik üçgeninde :

$$\frac{|TS|}{|RS|} = \tan \widehat{TRS} = 1{,}6. \quad |TS| = |RS| \,.\, 1{,}6 = 250 \,.\, 1{,}6 = 400 \text{ m dir.}$$



54. Şekil



55. Şekil

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen noktaların, herbirini başlangıç noktasına birleştiren doğruların denklemini bulunuz.

a) (4,3) b) (1,3) c) (3,1) d) (—4,3)

2. 55. Şekil, bir merdivenin, bir parçasının yandan görünüşüdür. Merdivenin eğimi, noktalı doğrunun eğimi ile belirtilmiştir.

a) Bu merdivenin eğimini bulunuz.

b) Noktalı doğru ile yatayın oluşturduğu açının ölçüsünü, yaklaşık olarak bulunuz.

3. Aşağıdaki doğruların eğimlerini bulunuz.

a) $\frac{y}{3} = -x$ b) $\frac{5y}{3} = 2x$ c) $\frac{-4}{y} = \frac{6}{x}$

3–5.2 $y = mx + n$ Doğrusunun Grafiği

1. Örnek :

$y = 2x + 3$ denklemini ele alalım. Bu eşitliği gerçekleyen sıralı ikililerden bazılarını bulalım :

$x = -\frac{5}{2}$ için, $y = -\frac{5}{2} \,.\, 2 + 3 = -5 + 3 = -2$

$x = -2$ için, $y = -2 \,.\, 2 + 3 = -4 + 3 = -1$

$x = -\frac{3}{2}$ için, $y = -\frac{3}{2} \,.\, 2 + 3 = -3 + 3 = 0$

$x = -1$ için, $y = -1 \,.\, 2 + 3 = -2 + 3 = 1$

$x = -\frac{1}{2}$ için, $y = -\frac{1}{2} \,.\, 2 + 3 = -1 + 3 = 2$

$x = 0$ için, $y = 2 \,.\, 0 + 3 = 0 + 3 = 3$

$x = \frac{1}{2}$ için, $y = 2 \,.\, \frac{1}{2} + 3 = 1 + 3 = 4$ tür.

Bu tür ikililerden, istenildiği kadar elde edilebilir. Bu ikilileri aşağıdaki tabloda gösterelim.

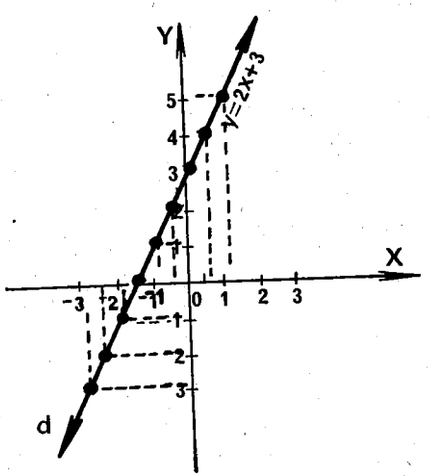
$(y = 2x + 3)$

x	...	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	...
y	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...

Bu ikililerin oluşturduğu küme :

$$\left\{ \ldots (-3, -3), \left(-\frac{5}{2}, -2\right), (-2, -1), \left(-\frac{3}{2}, 0\right), (-1, 1), \left(-\frac{1}{2}, 2\right), (0,3), \left(\frac{1}{2}, 4\right), (1,5), \ldots \right\} \text{ olur.}$$

Bu kümenin elemanları olan (x, y) ikililerinin düzlemdeki, görüntü noktaları, 56. Şekilde gördüğünüz gibi bir d doğrusudur, $y = 2x + 3$ eşitsizliğini gerçekleyen her (x, y) noktası, bu d doğrusu üzerinde bulunacağı için, d doğrusuna $y = 2x + 3$ denkleminin **grafiği** denir.



56. Şekil

Koordinat düzleminde, genel olarak bir doğrunun denklemi,

$y = mx + n$ — doğru denklemi

$ax \mp by \mp c = 0$ (a, b, c, $\in$ G, $a \neq 0$ veya $b \neq 0$)

biçimindedir.
ya da

$$ax \mp by \mp c = 0 \quad (a \neq 0 \text{ veya } b \neq 0)$$

biçimindeki her denklemin, koordinat düzleminde grafiği, eksenleri kesen bir doğrudur.

$$ax + by + c = 0$$

denklemi, eğer, $b \neq 0$ ise;

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

biçiminde gösterilebilir. $-\frac{a}{b} = m$ ve $-\frac{c}{b} = n$ (m, n $\in$ G) ile gösterilirse, bu denklem;

$$y = mx + n$$

biçiminde olur. Bu denklemdeki x in katsayısı olan m ye, denklemin **eğimi** denir. Örneğin, $y = 2x + 3$ denkleminde, eğim $m = 2$ ve $n = 3$ tür.

Uyarı : $y = mx + n$ biçimindeki bir doğrunun grafiğini çizmek için, önce bu denklemi gerçekleyen farklı iki noktanın koordinatları bulunur. Çünkü farklı iki nokta bir doğru belirtir. Bu noktalar en kolay biçimde :

1. $x = 0$ için, y nin değeri (0, y) ikilisinin görüntü noktası;

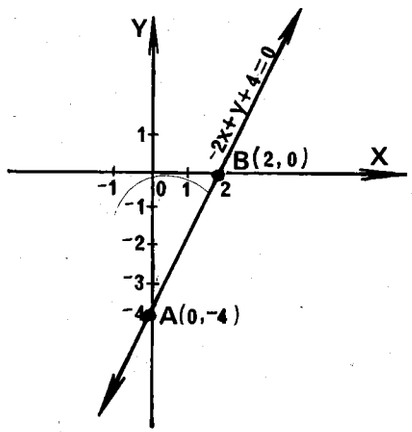
2. $y = 0$ için, x in değeri (x,0) ikilisinin görüntü noktası bulunur.

Sonra, bu iki noktadan geçen doğru çizilir.

2. Örnek :

$-2x + y + 4 = 0$ doğrusunun grafiğini çizelim.

$x = 0$ için, $y = -4$ ve $y = 0$ için, $x = 2$ olduğundan, bu doğru A (0, —4) ve B (2,0) noktasından geçer. Grafiği, 57. Şekildir.



57. Şekil

3. Örnek :

$3x - 2y - 6 = 0$ doğrusunun $y = mx + n$ biçiminde yazılır.

$$3x - 2y - 6 = 0 \Rightarrow -2y = -3x + 6$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3$$

olduğundan, doğrunun eğimi $m = \frac{3}{2}$ dir Bu doğrunun grafiğini çiziniz.

4. Örnek :

Koordinat düzleminde, $4x - 3y + 1 = 0$ doğrusu üzerinde bulunan $x = 2$ apsisli, M noktasının ordinatını bulalım.

$$x = 2 \text{ için, } 4x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow 4.2 - 3y + 1 = 0$$
$$\Rightarrow 9 = 3y$$
$$\Rightarrow y = 3 \text{ olur.}$$

M noktasının ordinatı 3 olup, M (2,3) tür.

Verilen doğru üzerinde ordinatı $y = -3$ olan N noktasının apsisi ne olur? Grafiğini çiziniz.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki doğruların eğimlerini bulunuz ve grafiklerini çiziniz.

Yol gösterme : $y = mx + n$ biçiminde yazınız.

a) $3x + 2y - 3 = 0$ b) $2x - 3y + 3 = 0$

c) $-3x + y + 4 = 0$ d) $4x + 3y + 6 = 0$

e) $-5x - 4y + 10 = 0$ f) $6x - 5y - 15 = 0$

g) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y + 6 = 0$ h) $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - 1 = 0$

3-6. DOĞRU ORANTILI

Bu kesimde, "bölüm 3 - 1" de gördüğünüz orantılı çoklukların, geometrik yorumunu yapacağız.

1. Örnek :

Manavdan elma satın aldığımız zaman ödeyeceğimiz para, aldığımız meyvanın miktarı ve elmanın fiyatına bağlıdır. Elmanın tanesinin 5 lira olduğunu varsayalım. Aşağıdaki tablo, satın alınan çeşitli sayıdaki elmalara ödenen parayı göstermektedir. Tabloyu inceleyiniz.

Elmanın Sayısı (adet)	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Elmanın Bedeli (TL)	y	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

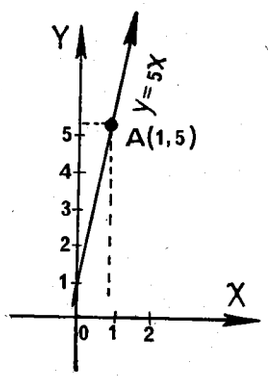
Tabloda, satın alınan elmaların miktarı arttıkça elmaya ödenen paranın da aynı oranda arttığını görüyor musunuz? Öyleyse, 12 elmanın bedelini nasıl bulursunuz? Şüphesiz, 1 elma 5 lira olduğuna göre, 12 sayısını, 5 ile (toplarım, Çıkarırım, Çarparaım, Bölerim) demiş olmanız gerekir. Cevap : Çarparım dır. O halde,

12 manın bedeli = 5 . 12 = 60 TL olur.

Genel olarak, elmanın değeri ile ödenen para arasındaki ilişkiyi, $y = 5x$ denklemi ile ifade edebiliriz.

$y = mx$ biçimindeki ifadelerin, başlangıç noktasından geçen bir doğrunun denklemi olduğunu biliyorsunuz.

Buna göre, $y = 5x$ bağıntısını bir grafikle göstermek istersek, 58. şekilde gördüğünüz gibi, başlangıç noktasından geçen bir doğru elde ederiz. Bu doğrunun eğimi 5 tir. Burada, her birim artışına karşılık ödenen paranın artışı 5 liradır. Bu nedenle, y ile x doğru orantılı olarak artıyor veya y ile x orantılıdır deriz. Bu bağıntıda fiyat ölçüsü ile adet ölçüsünün oranı 5 tir. Yani, $y = 5x \Leftrightarrow \frac{y}{x} = 5$ tir. Bu sayı değişmez. Bu nedenle, bu sayıya sabit deriz. 5 sayısına, **orantı sabiti** (**orantı katsayısı**) denir.



58. Şekil

2. Örnek :

Eğer, bir geminin ortalama hızı saatte 18 mil ise, 1 saat sonra kaç mil gider? 3 saatte, 4,5 saatte, t saatte ne kadar gider?

Gidilen l uzaklığını, zamanın t ölçüsü türünden veren formül : $l = 18t$ dir. Bu formülde görüldüğü gibi, uzaklık ölçüsü zaman ölçüsünün sabit bir katına eşittir. Yani, uzaklık zaman ile doğru orantılı olarak değişmektedir. O halde, uzaklığın zamanla oratılı olduğunu söyleyebiliriz. Burada, orantı sabiti 18 dir.

Sonuç :

a) x ile, y, k sıfırdan farklı bir sayı olmak üzere, $y = kx$ denklemiyle birbirine bağlanmış ise; x ile y doğru orantılı olarak değişiyor denir ve (x,y) ikililerinin koordinatlar düzlemindeki görüntü noktaları, başlangıç niktasından geçen bir doğrudur. Çoğu kez, "doğru" kelimesi kullanılmaz.

b) k sayısına orantı **sabiti** denir.

c) k pozitif bir sayı ise, x arttığı zaman y artar, x azaldığı zaman y azalır.

Uygulamalar :

1. Normal adımınızın uzunluğu yaklaşık olarak 65 cm dir.

a) a adım attığınızda ne kadar yol gitmiş olursunuz?

b) Gidilen yolun uzunluğunu cm türünden bir formül ile ifade ediniz.

c) a arttığı zaman yol da artar mı?

a) a adım yol gittiğiniz zaman, bir adımda gittiğiniz yol uzunluğu ile a nın çarpımı (65.a) kadar yol gider misiniz?

b) Gidilen yolun uzunluğu l ise, formül : $l = 65 . a$ cm olur.

c) $l = 65a$ bağıntısı doğru orantılı ve $65 > 0$ olduğundan, a arttığı zaman alınan yol da artar mı?

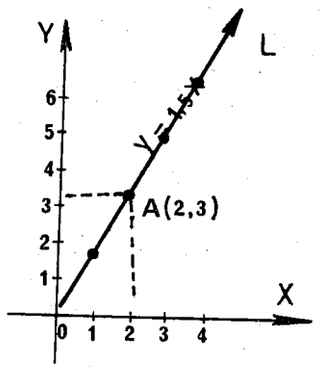
d) (b) de bulduğunuz $l = 65a$ denkleminde, eşitliğin çarpma özelliğine göre, her iki yanı, a nın çarpmaya göre tersi olan $\frac{1}{a}$ ile çarparsanız, $l . \frac{1}{a} = 65 . a . \frac{1}{a}$ ve $\frac{l}{a} = 65$ $\left(\frac{a}{a} = 1 \text{ dir}\right)$ biçiminde yazabilir misiniz? Buradan, $l = 65$ a denkleminin sabiti, $k = 65$ olur mu?

2. Tarsus ile Mersin arası 27 km dir. Bir şoför, dakikada ortalama hızı 1,5 km olan otomobili ile Tarsus'tan Mersin'e doğru hareket etmektedir. Bu hareketin denklemini yazınız ve grafikle gösteriniz.

Çözüm :

Zaman (dakika)	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Yol (km)	y	0	1,5	3	4,5	6	7,5	9	10,5	12	13,5	15	16,5	18	19,5	21	22,5	14	25,5	27

Yukarıdaki tabloyu inceleyiniz. Alınan yol, geçen zamanla doğru orantılı mıdır? O halde, gidilen y uzaklıklarını, zamanın x ölçüsü, türünden veren formül, $y = 1{,}5x$ olur mu? Bu hareketin denkleminin sabiti, $k = 1{,}5$ midir? $y = 1{,}5x$ denkleminin grafiği; 59. şekilde gördüğünüz [OL ışını mıdır?]



59. Şekil

3. Bir musluk, dakikada 3 litre su akıtmaktadır. Bu musluk, içinde 7,5 litre su bulunan 37,5 litre hacmindeki bir kabı dolduracaktır.

a) Suyun v hacmi ile t (dakika) arasındaki bağıntı nedir? Bu bağıntıyı, garafikle gösteriniz.

b) Kabın dolması için, musluk kaç dakika akmalıdır?

Çözüm :

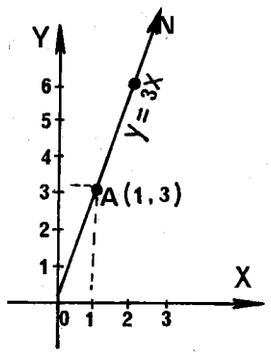
a) Aşağıdaki tabloyu inceleyiniz.

Zaman (dakika)	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Hacim (litre)	y	0	3	6	?	?	15	?	?	?	27	?

Tablodaki, (?) işaretli yerleri doldurursanız, akan suyun v hacminin geçen zaman (t dakika) ile doğru orantılı olduğunu göreceksiniz. Öyleyse t dakika (x) ile v hacmi (y) arasındaki bağıntı $v = 3t$ dir. Bu bağıntıyı, $y = 3x$ denklemi ile gösterebilir miyiz? Bu bağıntının grafiği, 60. şekilde gördüğünüz [ON ışını olur mu?

b) Kabın içinde 7,5 litre su olduğu bilindiğine göre, musluğun akması ile dolacak hacim; $37{,}5 - 7{,}5 = 30$ litredir. Buradan, $3t = v$ bağıntısında, verilen değerler yerine konursa,

$3t = 30 \Leftrightarrow t = 30 : 3 = 10$ dakika bulunur mu?



60. Şekil

ALIŞTIRMALAR

1. x ile y doğru orantılı olarak değişiyor ve $x = 3$ iken, $y = 21$ ise, $x = 5$ iken y ne olur?

2. d ile t nin doğru orantılı olarak deiştiğini ve $t = 4$ d nin, 120 olduğunu kabul edelim. d ile t arasındaki bağıntıyı veren denklemi yazınız.

3. Bazen, verilen bir değer kümesi yardımıyla bir denklemin yazılması istenebilir. Alttaki tabloda verilen bilgilere bakarak, p ile q nün doğru orantılı olarak arttığını söyleyebilir misiniz? Niçin?

p	30	50	—80	100	—120
q	3	5	—8	10	—12

4. (a) $y = \frac{2x}{3}$ bağıntısını kullanarak, aşağıda verilen sıralı ikililerde "?" işareti yerine uygun olan sayıları yazınız.

(3, ?), (—3, ?), (0, ?), (—6, ?), (2, ?), (—1, ?)

b) Bu noktaların görüntülerini koordinatlar düzleminde gösteriniz.

3–7. TERS ORANTILI

1. Örnek :

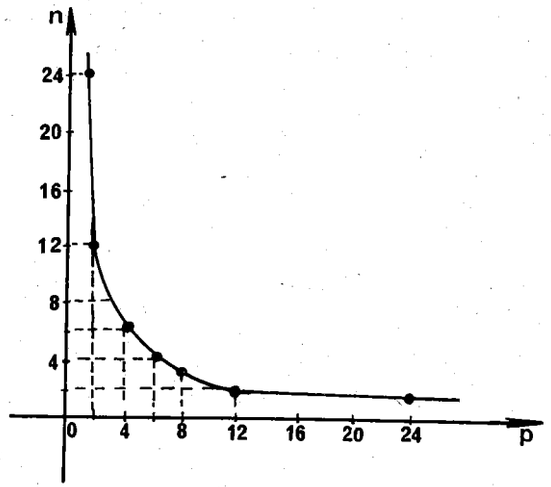
Yaş gününüze davet ettiğiniz arkadaşlarınıza ikram etmek üzere, 24 tane pasta hazırladığınızı ve böylece, her konuğunuza eşit sayıda pasta ikram edeceğinizi varsayalım. İkram edilecek pasta sayısı ile n (n bir sayma sayısıdır) konuk sayısı nasıl değişir? Örneğin, konuk sayısı iki katı olursa, herbirinin alacağı pasta ne kadar olur? Her konuğa ikram edilecek pasta sayısını p ile gösterelim. Pastaların toplam sayısı olan 24 şuna eşittir :

(Her konuğa verilen pasta sayısı). (Konuk sayısı) yani, p ile n arasındaki bağıntı; $p.n = 24$ bağıntısı ile ifade edilebilir. Bu bağıntıda, orantı sabiti 24 tür. $p.n = 24$ bağıntısının değerler tablosu aşağıdadır.

p	1	2	3	4	6	8	12	24
n	24	12	8	6	4	3	2	1

Tabloda gördüğünüz gibi, p arttığı zaman n azalmaktadır. Burada çok belirli olan bağlantı şudur : p nin herhangi bir değerinin iki katı alınırsa, buna karşılık n nin değeri 2 ile bölünmüş olur. p nin değerinin üç katı alınırsa, buna karşılık olan n nin değeri 3 ile bölünmüş olur.

Genel olarak, p nin herhangi bir değeri bir sayı ile çarpılırsa, buna karşılık olan n nin değeri aynı sayı ile bölünmüş olur. p . n = 24 ifadesi için, **"p ile n ters yönde değişir"**. Başka bir deyimle **"p ile n ters orantılıdır"** denir.



61. Şekil

61. Şekil, p.n = 24 ifadesinin, p ve n nin pozitif değerleri için grafiğidir. Yukarıda söylediklerimizin, bu grafikte nasıl göründüğüne dikkat ediniz.

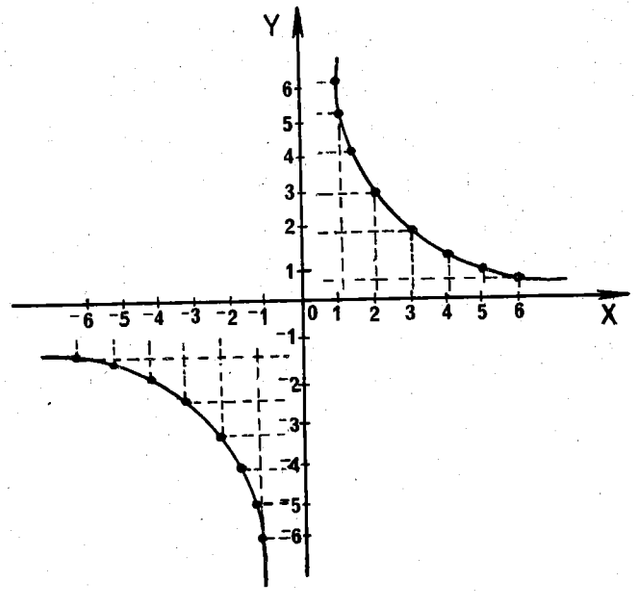
2. Örnek :

xy = 6 ifadesinin tablosunu yapalım ve grafiğini çizelim.

x	−6	−5	−4	−3	−2	−1	1	2	3	4	5	6
y	−1	−1,2	−1,5	−2	−3	−6	6	3	2	1,5	1,2	1

Yukarıdaki tabloda, x arttığı zaman y nin azaldığını; x azaldığı zaman y nin arttığını ve x in veya y nin negatif değerler almasının hiç bir şeyi etkilemediğini görüyorsunuz. Tabloda bulduğumuz noktaların görüntülerini koordinatlar düzleminde işaretledikten sonra, 62. şekildeki grafiğini çizelim. Yeni gördüğünüz ve grafiğinin bir parçası

olan bu eğriye, **hiperbol** denir. Hiperbolün, iki kolu vardır. Buna göre, hiperbol ters bir orantı gösterir.



62. Şekil

Sonuç :

a) x ile y, sıfırdan farklı bir sayıyı gösterdiğine göre, xy = k denklemiyle birbirine bağlanmış ise, x ile y ters orantılı olarak değişiyor denir.

b) k sayısı y ile x in çarpmaya göre tersi olan $\frac{1}{x}$ arasındaki, orantı sabittir.

yani, $x.y = k \Rightarrow y = k \cdot \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ olur.

c) k, pozitif bir gerçek sayı ise, x arttığı zaman y azalır ve x, azaldığı zaman y artar.

d) xy = k nin grafiği bir doğru olmayıp, iki dalı bulunan (hiperbol) bir eğridir. Grafiği, başlangıç noktasından geçmez ve x = 0 veya y = o için, eğri üzerinde bir nokta yoktur.

Uygulamalar :

1. y le x ters orantılı olarak değişiyor. $x = 3$ iken $y = 21$ ise, $x = 7$ iken y ne olur?

Çözüm :

y ile x ters orantılı olarak değiştiğine göre, x ve y arasındaki bağıntının denklemi $x.y = 3.21 = 63$ olur. Burada orantı sabiti $k = 63$ tür. O halde, $x = 7$ iken, $7.y = 63 \Rightarrow y = 63 : 7 = 9$ bulunur.

2. 3 işçi bir işi 20 günde bitiriyor. Aynı koşullarla bu işte sıra ile 4,6,10,12,15,20 işçi çalıştığı zaman, işin bitme süreleri ne olur? Buradaki "işçi sayısı, zaman" bağıntısının denklemini yazınız.

Çözüm :

İşçi sayısına x, zamana (gün) y dersek; $x = 3$ iken $y = 20$ olur. Yapılan iş sabit olduğundan, işçi sayısı arttıkça süre azalır. Bu nedenle, x ile y ters orantılı olarak değişir. Öyleyse, "İşçi sayısı, zaman" bağıntısı $xy = 3.20 = 60$ olup, orantı sabiti, $k = 60$ tır. Buradan, $x = 4$ iken, $4.y = 60 \Leftrightarrow y = 60 : 4 = 15$ gün olur. Yani, 4 işçi aynı işi, 15 günde bitirir. Aynı düşünüş yöntemiyle 6,10,12,15,20 işçi çalıştığı zaman, bu işin bitme sürelerini belirten tabloyu :

İşçi sayısı	x	3	4	6	10	12	15	20
Zaman (gün)	y	20	15	10	?	5	?	?

biçiminde yapabiliriz. Tablodaki (?) işaretli yerlere yazılması gereken sayıları yazınız.

3. 3 işçi günde 6 şar saat çalışarak bir işi 45 günde bitiriyorlar. Bu işi, 6 işçi 5 saat çalışarak kaç günde bitirirler?

Çözüm :

Her işçi, günde 6 saat çalıştığına göre, 3 işçi bir günde $3.6 = 18$ saat çalışmış olur. Başka bir deyişle, bu iş, günde 18 saat çalışılarak 45 günde bitirilmiştir. Bu kez, 6 işçi güne $6.5 = 30$ saat çalışarak, aynı işi kaç günde bitirirler diye düşünmeliyiz. Burada, işçi sayısı ile zaman bağıntısı ters orantılı olarak değişir. Bu bağıntı, $xy = 18.45 = 810$ olup; orantı sabiti 810 dur. Bu bağıntıya göre, $x = 30$ iken, y yi bulmalıyız. O halde, $30.y = 810 \Leftrightarrow y = 27$ günde bitirirler.

ALIŞTIRMALAR

1. x ile y ters orantılı olarak değişiyor. $x = 4$ iken, $y = 16$ ise, k yi bulunuz.

2. $x = \frac{1}{3}$ iken, $y = 24$ ve y ile x ters orantılı olarak eğişiyorsa, k yi bulunuz.

3. x ile y ters orantılı olarak değişiyor. $x = 5$ iken, $y = 32$ ise, $x = 8$ iken, y ne olur?

4. $xy = 12$ olduğuna göre, aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri tamamlayınız ve bu bağıntının grafiğini çiziniz. Eğriyi daha kolay çizmek için, isterseniz daha çok sayıda ikililer bulabilirsiniz.

x	–12	–6	–5	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4	5	6	12
y	–1													

5. 3 işçi, bir işi 54 günde bitiriyor. Aynı koşullarla bu işte sıra ile 2,6,9 işçi çalıştığı zaman, işin bitme süreleri ne olur?

Yol gösterme :

$k = x.y = 3 . 54 = 162$ olduğunu düşününüz.

6. Bir işi, 9 işçi, günde 8 er saat çalışarak 52 günde bitiriyor. Bu işi, 13 işçi günde 6 şar saat çalışarak kaç günde bitirir?

(Cevap : 48 günde).

ÜÇÜNCÜ BÖLÜMÜN TEST SORULARI

1. $\frac{4}{9}$ u 48 olan a sayısının b sayısına oranı $\frac{6}{7}$ dir. b sayısı kaçtır?

a) 252 b) 108 c) 63 d) 126 e) 128

2. 30 kg çiğitten 4,8 kg yağ elde edilirse, 14,4 kg yağ kaç kg çiğitten elde edilir?

a) 120 b) 45 c) 30 d) 80 e) 90

3. $\widehat{A} \cong \widehat{E}$, $[ED] \cong [ED]$, $\widehat{B} \cong \widehat{D}$ ise; $\overset{\frown}{ABC}$ ve $\overset{\frown}{DEF}$ üçgenlerinin köşeleri arasındaki eşleme ne olur?

a) $ABC \leftrightarrow DEF$ b) $ABC \leftrightarrow DFE$ c) $ABC \leftrightarrow EDF$

d) $ABC \leftrightarrow EFD$ e) $ABC \leftrightarrow FDE$

4. $\overset{\frown}{ABC}$ ve $\overset{\frown}{DEF}$ üçgenlerinde, $\frac{|AB|}{|FE|} = \frac{|BC|}{|ED|} = \frac{|AC|}{|FD|}$ ise; köşeleri arasındaki benzerlik eşlemesi ne olur?

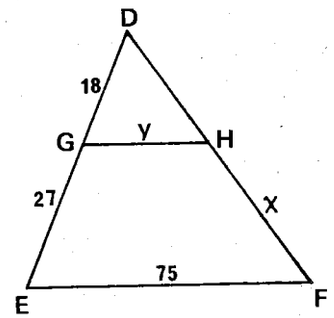
a) $ABC \leftrightarrow FED$ b) $ABC \leftrightarrow FDE$ c) $ABC \leftrightarrow DEF$

d) $ABC \leftrightarrow DFE$ e) $ABC \leftrightarrow EFD$

5. 63. Şekilde, $[GH] \,//\, [EF]$ dir.

Verilenlere göre, x in uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

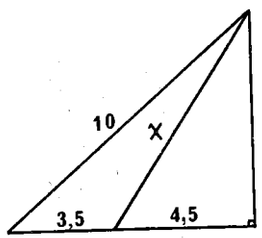
a) 48 b) 36 c) 54 d) 40 e) Hiç biri.



63. Şekil

6. 63. Şekildeki y uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

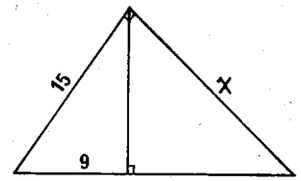
a) 30 b) 45 c) 21 d) 50 e) Hiç biri.



64. Şekil

7. 64. Şekildeki x in uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

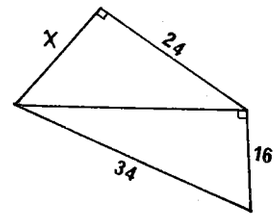
a) 6 b) 4,8 c) 8 d) 6,5 e) 7,5



65. Şekil

8. 65. Şekildeki x in uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

a) 25 b) 15 c) 16 d) 20 e) 12



66. Şekil

9. 66. Şekildeki x in uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

a) 9 b) 20 c) 18 d) 30 e) Hiç biri.

10. Aşağıdakilerden hangisi **yanlıştır**?

a) $\tan 60° = \sqrt{3}$ b) $s(x) < 90°$ ise, $\cos x = \sin (90 - x)°$

c) $\cot 40° = \tan 50°$ d) $\cos 60° = 2.\cos 30°$ e) Hiç biri.

11. $s(x) < 90°$ ve $\cos x = \frac{4}{5}$ ise, aşağıdakilerden hangisi $\frac{3}{4}$ e eşittir?

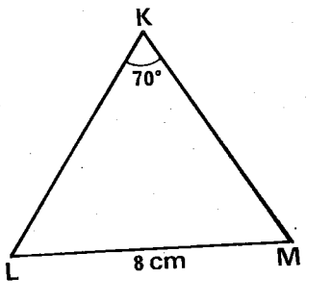
a) $\cot x$ b) $\tan x$ c) $\cos x$ d) $\sin x$ e) hiç biri.

12. $s(x) < 90°$ ve $\cot x = \frac{12}{5}$ ise, aşağıdakilerden hangisi $\frac{5}{13}$ tür?

a) sin x b) cos x c) tan x d) cot x e) Hiç biri

13. $s(x) < 90°$ ve $\tan x = \frac{8}{15}$ ise, cos x aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{8}{17}$ b) $\frac{17}{15}$ c) $\frac{17}{8}$ d) $\frac{15}{17}$ e) Hiç biri.



67. Şekil

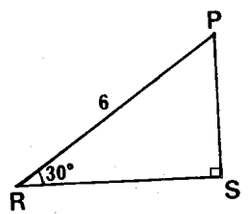
14. 67. Şekildeki $\widehat{KLM}$ üçgeni ikizkenar ve $|KL| = |KM|$ dir. $s(\widehat{K}) = 70°$, $|LM| = 8$ cm olduğuna göre, $|KL|$ uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{4}{\sin 55°}$ b) $\frac{4}{\cos 35°}$ c) $\frac{4}{\sin 35°}$

d) $4 \sin 55°$ e) Hiç biri.

15. 68. Şekildeki $|RS|$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) $3\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) 3 d) $3\sqrt{2}$ e) Hiç biri.



68. Şekil

16. $\frac{4}{3}x + 2y - 3 = 0$ doğrusunun eğimi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $-\frac{2}{3}$ e) Hiç biri.

17. Aşağıdaki sıralı ikililerden hangisi, $5x + 4y + 1 = 0$ doğrusu üzerindedir?

a) (2, –3) b) (3, –4) c) (–4, 3) d) (4, –5) e) Hiç biri.

18. x ile y doğrusu orantılı olarak değişiyor. $x = \frac{5}{8}$ iken $y = 40$ ise, $x = \frac{3}{4}$ iken y ne olur?

a) 32 b) 20 c) 36 d) 48 e) Hiç biri.

19. x ile y ters orantılı olarak değişiyor. $x = 12$ iken $y = 48$ ise, $x = 8$ iken y ne olur?

a) 32 b) 72 c) 36 d) 96 e) Hiç biri.

20. Bir işi, 18 işçi 24 günde bitirirse, aynı işi 12 işçi kaç günde bitirir?

a) 16 b) 48 c) 32 d) 36 e) Hiç biri.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

DENKLEMLER

4–1. ÖZDEŞLİKLER VE BİNOM AÇILIMI

1. Örnek :

$x + 7 = 7 + x$ açık önermesini gözönüne alalım.

$x = 5$ için,	$x = -16$ için,
$x + 7 = 7 + x$	$x + 7 = 7 + x$
$\downarrow$	$\downarrow$
$5 + 7 = 7 + 5$	$-16 + 7 = 7 + -16$
$12 = 12$	$-9 = -9$

Bu açık önermede, x yerine başka değerler de versek, her defasında eşitliğin gerçekleştiğini görürüz. Bu nedenle, bu açık önermenin çözüm kümesi : Ç = G (gerçek sayılar) dır.

2. Örnek :

$x(x + 3) = x^2 + 3x$ açık önermesini alalım.

$x = 4$ için,	$x = -7$ için,
$x(x + 3) = x^2 + 3x$	$x(x + 3) = x^2 + 3x$
$\downarrow \downarrow$	$\downarrow \downarrow$
$4(4 + 3) = 4^2 + 3.4$	$-7(-7 + 3) = (-7)^2 + 3.(-7)$
$4.7 = 16 + 12$	$-7.(-4) = 49 + (-21)$
$28 = 28$	$28 = 28$

Bu açık önermede de x yerine koyacağımız tüm sayılar için, bu eşitlik gerçekleşir. O halde, çözüm kümesi : Ç = G dir.

İşte, bu iki örnek türünden olan açık önermelere **özdeşlik** denir.

3. Örnek :

$6x - 5 = x + 5$ açık önermesini alalım.

$x = 2$ için,	$x = 3$ için,
$6x - 5 = x + 5$	$6x - 5 = x + 5$
$\downarrow \quad \downarrow$	$\downarrow \quad \downarrow$
$6.5 - 5 = 2 + 5$	$6.3 - 5 = 3 + 5$
$12 - 5 = 5$	$18 - 5 = 8$
$7 = 7$	$13 \neq 8$

Bu açık önermede, x yerine 2 den başka hangi sayıyı yazarsanız yazınız, eşitliğin gerçekleşmediğini (önermenin doğru olmadığını) göreceksiniz O halde, bu açık önermenin çözüm kümesi Ç = { 2 } dir. Bu nedenle, $6x - 5 = x + 5$ açık önermesi, bir özdeşlik değildir. Bu tür açık önermelere de **denklem** denir.

4. Örnek :

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$
$$= (x - y) \cdot x + (x - y) \cdot y \qquad \text{(Dağılma özeliği).}$$
$$= x \cdot x - y \cdot x + y \cdot x - y \cdot y \qquad \text{(Dağılma özeliği).}$$
$$= x^2 - xy + xy - y^2$$
$$= x^2 + \underbrace{(xy - xy)}_{0} - y^2 \qquad \text{(Toplamada, sıfır etkisiz eleman).}$$
$$= x^2 - y^2$$

olduğundan, bu ifade bir özdeşliktir. Bu örnekte uyguladığımız yönteme, özdeşliğin **kontrolü** denir.

5. Örnek :

a) $(x + y)^1 = x + y$
b) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
c) $(x -)x^2 = x^2 - 2xy + y^2$
d) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
e) $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
f) $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
g) $(x - y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$
h) $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$
ı) $(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

Bu açılımlar birer özdeşliktir.

Yukarıdaki ifadelerin, n nin 1, 2, 3, 4 ve 5 değerleri için $(x \mp y)^n$ nin $(n \in D)$ açılımı olduğunu ve bu açılımdaki katsayıları görüyorsunuz. Bu açılımlarda elde edilen katsayılar, Paskal üçgeninin bir parçasını oluşturur mu?

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 46 4 1
1 5 10 10 5 1
1 1

Bu katsayıları, yukarıdaki Pascal (Paskal) üçgeninden yararlanarak bulabileceğimizi "kesim" 2.1" de görmüştük. Yine aynı kesimde Paskal üçgenindeki her satırın, n elemanlı $(n \in D)$ bir kümenin alt küme (küme parçası) sayıları olduğunu ve bu sayılar bulunurken; birler hariç her içeriğinin, bir önceki satırda kendisine en yakın olan iki sayının toplamıyla elde edildiğini, nedenleriyle incelemiştik.

5. Örnekteki her açılımda, x ve y ye vereceğimiz her sayısal değer için, bu eşitlikler gerçekleşir. Öyleyse, bu açılımlar birer özdeşliktir.

Uygulamalar :

1. Aşağıdaki eşitliklerin, özdeşlik olduklarını gösteriniz.

a) $a^2 - a = a(a-1)$

b) $x(3x-1) = 3x^2 - x$

c) $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$

d) $(2x-y)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$

e) $4x^2 - 9y^2 = (2x-3y)(2x+3y)$

f) $25a^2 - b^2 = (5a-b)(5a+b)$

g) $(x-m)(x-n) = x^2 - (m+n)x + mn$

h) $(x-m)(x+n) = x^2 + (n-m)x - mn$

ı) $3xy(y-x) = (x-y)^3 + y^3 - x^3$

i) $(x-2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

Çözümler :

a) $a^2 - a = a(a-1) = a.a - 1.a = a^2 - a$ (Dağılma özeliği).

b) $x(3x-1) = 3x^2 - x$ Sol yana, dağılma özeliği uygulanırsa;

$x.3x - 1.x = 3x^2 - x$

$3x^2 - x = 3x^2 - x$

c) $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$

$= x^2 + 2xy + y^2 - 2xy$

$= x^2 + y^2 + \underbrace{(2xy - 2xy)}_{0}$ (Birleşme özeliği).

$= x^2 + y^2$ (Toplamada, sıfır etkisiz eleman).

d) $(2x-y)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$ sol yan açılırsa;

$(2x-y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot y + y^2$

$= 4x^2 - 4xy + y^2$ sağ yanla aynı olduğu görülür.

e) $4x^2 - 9y^2 = (2x-3y)(2x+3y)$

$= (2x-3y) \cdot 2x + (2x-3y).3y$ (Dağılma özeliği).

$= 4x^2 - 6xy + 6xy - 9y^2$ (Dağılma özeliği).

$= 4x^2 + \underbrace{(6xy - 6xy)}_{0} - 9y^2$ (Birleşme özeliği).

$= 4x^2 - 9x^2$ (Toplamada, sıfır etkisiz eleman).

f) $25a^2 - b^2 = (5a-b)(5a+b)$

$= (5a-b) \cdot 5a + (5a-b) \cdot b$ (Dağılma özeliği).

$= 25a^2 - 5ab + 5ab - b^2$ (Dağılma özeliği).

$= 25a^2 - \underbrace{(5ab - 5ab)}_{0} - b^2$ (Birleşme özeliği).

$= 25a^2 - b^2$ (Toplamada, sıfır etkisiz eleman).

g) $(x-m)(x-n) = x^2 - (m+n)x + mn$

$(x-m) \cdot x + (x-m) \cdot (-n) = x^2 - mx - nx + mn$

(Dağılma özeliği).

$x^2 - mx - nx + mn = x^2 - mx - nx + mn$ (Dağılma özeliği).

Her iki yan aynı olduğundan, bu ifade özdeşliktir.

h) $(x-m)(x+n) = x^2 + (n-m)x - mn$

$x^2 - mx - nx - mn = x^2 - mx - nx - mn$ olup, özdeşliktir.

ı) $3xy\ (y-x) = (x-y)^3 + y^3 - x^3$

$3xy^2 - 3x^2y = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + y^3 - x^3$

$= \underbrace{(x^3 - x^3)}_{0} + \underbrace{(y^3 - y^3)}_{0} + 3xy^2 - 3x^2y$

$= 3xy^2 - 3x^2y$ olup, özdeşliktir.

i) $(x-2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

sol yan $(x-2y)^3 = x^3 + 3x^2(-2y) + 3x\ (-2y)^2 + (-2y)^3$

$= x^3 - 6x^2y = 3x.4y^2 + (-8y^3)$

$= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

olup; sağ yanla aynı olduğundan özdeşliktir.

2. Aşağıdaki ifadeleri, çarpmanın toplama ve çıkarma üzerine dağılma özeliklerinden, özdeşliklerden yararlanarak, iki çarpanın çarpımı biçiminde yazınız (çarpanlara ayırınız).

a) $5x + 5y$
b) $7x - 7$
c) $8ab + 8b$
d) $4x^2 - 8xy$
e) $x^3 - x^2y$
f) $6a^2b - 6ab^2$
g) $a^2 - b^2$
h) $x^2 - 1$
ı) $x^2 - 4$
i) $9a^2 - b^2$
j) $25x^2 - 9y^2$
k) $x^4 - 16a^2$
l) $a^2 - 2ab + b^2$
m) $x^2 + 4xy + 4y^2$
n) $9x^2 - 12x + 4$
p) $25a^2 + 10a + 1$
r) $a^2 - 8ab + 16b^2$
s) $x^4 + 12x^2 + 36$

Çözümler :

a) $5x + 5y = 5(x + y)$
b) $7x - 7 = 7(x - 1)$
c) $8ab - 8b = 8b(a - 1)$
d) $4x^2 - 8xy = 4x(x - 2y)$
f) $6a^2b - 6ab^2 = 6ab(a - b)$
e) $x^3 + x^2y = x^2(x + y)$
g) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
h) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$
ı) $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$
i) $9a^2 - b^2 = (3a - b)(3a + b)$
j) $25x^2 - 9y2 = (5x - 3y)(5x + 3y)$
k) $x^4 - 16a^2 = (x^2 - 4a)(x^2 + 4a)$

l) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$
m) $x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2 = (x + 2y)(x + 2y)$
n) $9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2 = (3x - 2)(3x - 2)$
p) $25a^2 + 10a + 1 = (5a + 1)^2 = (5a + 1)(5a + 1)$
r) $a^2 - 8ab + 16b^2 = (a - 4b)^2 = (a - 4b)(a - 4b)$
s) $x^4 + 12x^2 + 36 = (x^2 + 6)^2 = (x^2 + 6)(x^2 + 6)$

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki ifadelerin özdeşlik olduklarını gösterir.

a) $x(x - 4) = x^2 - 4x$
b) $3x^2(x + 5) = 3x^3 + 15x^2$
c) $xy^2(x^2 - y) = x^3y^2 - xy^3$
d) $(a - 10)(a + 10) = a^2 - 100$
e) $(4x - y)(4x + y) = 16x^2 - 4^2$
f) $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2$
g) $(x - 2y)^2 + 8xy = (x + 2y)^2$
h) $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$
ı) $(x - 3)(x - 4) = x^2 - 7x + 12$
i) $(x + 2)(x - 5) = x^2 - 3x - 10$
j) $(x + 8)(x - 7) = x^2 + x - 56$
k) $(3x - 1)(x - 5) = 3x^2 - 16x + 5$

2. Aşağıdaki ifadeleri, çarpmanın toplama ve çıkarma üzerine dağılma özeliğinden, özdeşliklerden yararlanarak, iki çarpmanın çarpımı biçiminde yazınız (çarpanlara ayırınız).

a) $7x + 7a$
b) $6x^2 - 6a$
c) $5x^2 - 10x$
d) $8x^3y^2 + 4x^2y^3$
e) $3m^2n - 6mn^2$
f) $12a^3 + 4a^2b$
g) $m^2 - n^2$
h) $1 - a^2$
l) $x^2 - 9$
j) $49x^2 - 4y^2$
k) $25a^4 - b^2$
l) $9a^2 - 6a + 1$
m) $16x^2 + 8xy + y^2$
n) $4a^2 - 20a + 25$
p) $y^2 + 4y + 4$
r) $49 - 14m + m^2$
s) $x^2 - 18x + 81$
t) $36 + 36x + 9x^2$

4–2 BİRİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

Örnek :

$x + 8 = 12$ ifadesinin, bir açık önerme olduğunu biliyorsunuz. Bu açık önerme bir bilinmeyenli olup, bilinmeyeni x tir. Burada, x bir sayıyı anlatmaktadır. Bu eşitliğin gerçekleşmesi için, $x = 4$ olması gerektiği açıktır. Çünkü, $4 + 8 = 12$ ve $12 = 12$ dir. O halde, bu eşitlik, ancak $x = 4$ için gerçekleşir. Bu nedenle, $x + 8 = 12$ ifadesi, bir **denklemdir.** 4 sayısı, bu denklemin **çözüm kümesi** olup,

$$Ç = \{4\} \text{ biçiminde gösterilir.}$$

Bu örnekteki gibi, bilinmeyenin bazı değerleri için, gerçeklenebilen **açık** önermelere **denklem** denir.

Bir denklemi gerçekleyen değer ya da değerler kümesine, bu denklemin **çözüm kümesi** denir. Bir denklemin çözümü demek, o denklemin çözüm kümesinin bulunması demektir.

Denklemleri çözerken, şu kurallardan yararlanacağız.

Bir eşitliğin sol yanının anlattığı sayı a, sağ yanının anlattığı sayı b ve $c \neq 0$ olsun.

1. Eşitliğin toplama özeliği : $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$

2. Eşitliğin çarpma özeliği : $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$

3. Eşitliğin bölme özeliği : $a = b \Leftrightarrow a : c = b : c$

4. Toplama ve çarpma işlemlerinde, daha önce öğrendiğimiz ve çeşitli işlemlerde uyguladığımız değişme ve birleşme özelikleri.

1. Örnek :

$x + 3 = 16$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$x + 3 = 16$ (Eşitliğin toplama özeliğine göre, iki yana, 3 ün

$x + (3 + -3) = 16 + (-3)$ toplamaya göre tersi olan -3 eklenir).

$x + 0 = 13$ (Sıfırın, toplamada etkisiz eleman özeliği).

$x = 13$ ve $Ç = \{13\}$ bulunur.

2. Örnek :

$x + \frac{4}{5} = \frac{5}{7}$ denkleminin çözüm kümesi :

$x + \frac{4}{5} = \frac{5}{7}$ (Eşitliğin iki yanına, $\frac{4}{5}$ in toplamaya göre tersi olan $-\frac{4}{5}$ eklenir).

$$x + \underbrace{\left(\frac{4}{5} + \frac{-4}{5}\right)}_{0} = \frac{-4}{5} + \frac{5}{7}$$

$x + 0 = \frac{-28 + 25}{35}$ (Sıfır, toplamada etkisiz elemandır).

$$x = -\frac{3}{35} \text{ ve } Ç = \left\{-\frac{3}{35}\right\} \text{ dir.}$$

3. Örnek :

$3x + 7 = 19$ denkleminin çözüm kümesi :

$3x + 7 = 19$ (eşitliğin iki yanına, 7 nin toplamaya göre

$3x = \underbrace{(7 + -7)}_{0} = 19 + (-7)$ tersi olan -7 eklenir).

$3x + 0 = 12$ (Sıfır, toplamada etkisiz elemandır).

$3x = 12$ (Eşitliğin iki yanına, 3 ün çarpmaya göre tersi, olan $\frac{1}{3}$ ile çarpılır).

$$\left(\frac{1}{3} \cdot 3\right) \cdot x = 12 \cdot \frac{1}{3}$$

$1 \cdot x = \frac{12}{3}$ (1 sayısı çarpmada etkisiz elemandır).

$x = 4$ ve $Ç = \{4\}$ dir.

Kontrolü :

$$3x + 7 = 19$$
$$\downarrow$$
$$3.4 + 7 = 10$$
$$12 + 7 = 19$$
$$19 = 19$$

4. Örnek :

$7x + 9 = 2x - 15$ denkleminin çözüm kümesi :

$7x + 9 = 3x - 15$

$(7x + -3x) + 9 = (3x + -3x) - 15$ (Eşitliğin toplama özeliği)

$4x + 9 = \underbrace{0}\quad - 15$

$4x + \underbrace{(9 + -9)} = -15 + (-9)$ (Eşitliğin toplama özeliği).

$4x + \quad 0 \quad = -24$ (Toplamada, sıfır etkisiz elemanıdır).

$\left(\frac{1}{4} \cdot 4\right) . \quad 4x = -24 . \frac{1}{4}$ (Eşitliğin çarpma özeliği).

$1 . x = -6$ (1 in, çarpmada etkisiz eleman özeliği).

$x = -6$ ve $Ç = \{-6)\}$ dir.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

a) $3x + 3 = 2x + 9$ b) $6x + 9 + (-3) + 2x = -x + 12$

c) $10x - 1 = 4x + 5$ d) $3x + 5x + 13 = 2x - 5$

a) $3x - 9 = x + 5$ f) $3x + 2x - 2 = 2x + 3$

g) $4(x + 5) = 2x + 4$ h) $2(x + 7) - (5x - 1) = x + 6$

ı) $6(2x - 3) + 3(x - 1) = 2x - 8$

j) $\frac{6}{7}x - \frac{4}{5}x = \frac{2}{5}$ $(x = 7)$

k) $\frac{x}{2} - 4 + 3\frac{1}{2}x = 5x - 1\frac{3}{4} + x$ $\left(x = \frac{-9}{8}\right)$

l) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{3} = x + \frac{1}{3}$ $\left(x = \frac{1}{5}\right)$

m) $\frac{2x-1}{3} - \frac{4-x}{5} = \frac{x-4}{6}$ $\left(x = \frac{2}{3}\right)$

n) $\frac{3-x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x+2}{12} = 2$ $(x = -2)$

p) $\frac{2x-1}{6} + \frac{x+1}{3} - \frac{x}{2} = x + 2$ $\left(x = -\frac{11}{5}\right)$

r) $\frac{4x+1}{3} - \frac{x+4}{6} + \frac{x-1}{4} = x - \frac{3}{4}$ $\left(x = -\frac{2}{5}\right)$

s) $\frac{x+5}{6} - \frac{x-3}{4} - \frac{x+1}{2} = 1$ $\left(x = \frac{1}{7}\right)$

ş) $\frac{x-4}{6} + \frac{x-1}{9} - \frac{x-3}{4} = 0$ $(x = 1)$

t) $\frac{7x-42}{10} + \frac{27-2x}{2} - \frac{9}{2} = 0$ $(x = 16)$

2. Aşağıdaki problemlerin denklemlerini kurunuz ve çözünüz.

a) Ardışık iki tek sayının toplamı 48 dir. Bu sayıları bulunuz.
(Cevap : 23, 25) $(2n+1) + (2n+3) = 48$

Yol gösterme :

Bir tek sayı $2n + 1$ $(n \in T)$ ve ardışığı olan tek sayı da $2n + 3$ tür.

b) Ardışık iki çift sayının toplamı 74 tür. Bu sayıları bulunuz.
(Cevap : 36, 38). $2n + (2n+2) = 74$

Yol gösterme :

Bir çift sayı 2n ($n \in T$), ardışığı olan çift sayı da $(2n + 2)$ dir.

c) Ardışık üç tamsayının toplamı 36 dır. Bu sayıları bulunuz. (Cevap : 11, 12, 13). $n+(n+1)+(n+2)=36$

★ d) Bir tamsayının 4 katı, bu tamsayının ardışığı olan tamsayının 2 katından 18 fazladır. Bu tamsayıları bulunuz. $4x=2(n+1)+18$

(Cevap : 10, 11).

e) Bir sayının 15 eksiğinin 3 katı 174 tür. Bu sayıyı bulunuz.

(Cevap : 73).

f) Bir sayının 6 katı, kendisiyle toplanırsa, 4 katından 51 fazla oluyor. Bu sayıyı bulunuz. (Cevap : 17).

g) Bir sayının 5 katının 25 eksiği 95 tir. Bu sayıyı bulunuz.

(Cevap : 24).

★ h) Bir sayının $\frac{3}{4}$ ne 7 eklenirse, 52 elde ediliyor. Bu sayıyı bulunuz. (Cevap : 60).

∝ (i) Bir sayının $\frac{3}{4}$ ü ile $\frac{5}{7}$ si arasındaki fark 4 tür. Bu sayı kaçtır? (Cevap : 112). $\frac{3}{4}x-\frac{5}{7}x=4$

∝ (i) 62 sayısını öyle iki sayının toplamı biçiminde yazınız ki; birincinin $\frac{1}{2}$ si ile ikincinin $\frac{1}{5}$ şi toplamı 22 olsun. (Cevap : 32, 30).

$$x\cdot\frac{1}{2}+(62-x)\cdot\frac{1}{5}=22$$

Yol gösterme :

1. Sayı x ise, 2. sayı $62 - x$ olur.

∝ (j) $\frac{2}{5}$ şi ile $\frac{3}{4}$ ü toplamı, 69 olan sayıyı bulunuz. (Cevap : 60).

(k) Hakan, parasının $\frac{1}{3}$ ü ile $\frac{3}{7}$ sini harcadıktan sonra, geriye 15 lirası kalıyor. Hakan'ın parası kaç liradır? (Cevap : 63 L).

$$x-\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{7}x\right)=15$$

★ (l) Bülent'in yaşı, Ufuk'un yaşının 3 katından 6 yıl eksiktir. 5 yıl önce yaşlarının toplamı 56 olduğuna göre; şimdiki yaşlarını bulunuz. (Cevap : 18, 48). $[(3x-6)-5]+(x-5)=56$

★ (m) Lale'nin yaşı babasının yaşının $\frac{1}{3}$ üne eşittir. 14 yıl sonra, Lale'nin yaşı babasının yaşının yarısı olacaktır. Her ikisinin şimdiki yaşlarını bulunuz. (Cevap : 14, 42). Baba x Kız $\frac{1}{3}x$ $\left(\frac{1}{3}x+14\right)=\frac{x+14}{2}$

(n) Bir yolcu otobüsü, bir şehirden hareketle gideceği yere 9 saatte varıyor. Eğer, otobüsün hızı, ilk hareketinden itibaren saatte ortalama 20 km arttırılsaydı; gideceği şehre 7 saatte varacaktı. Otobüsün, saatteki ilk ortalama hızı ve iki şehir arasındaki uzaklık kaç km dir? (Cevap : 70 km/Saat, 630 km). $9\cdot x=(x+20)\cdot 7$ $x=70$ km/saat

(p) İki şehir arasındaki uzaklık 420 km dir. Bu şehirlerin, birinden ortalama hızı 75 km olan bir otobüs, diğerinden saattaki ortalama hızı 65 km olan bir kamyon aynı zamanda karşılaşmak üzere hareket ediyorlar. Kaç saat sonra karşılaşırlar? (Cevap : 3 saat).
zaman x olsun $75x+65x=420$ den $x=3$ saat

(r) Bir işçi, bir işi 20 günde; başka bir işçi, aynı işi 30 günde yapabiliyor. Bu iki işçi beraber çalışsalar, aynı işi kaç günde bitirirler? (Cevap : 12 günde).

kaç günde bitirir

Yol gösterme :

İki işçi, birlikte x günde bitirirse, denklem $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{1}{x}$ olur.

(s) İki işçi, bir işi birlikte 6 günde yapıyorlar. Bu işçilerden biri aynı işi 15 günde yapabildiğine göre, diğer işçi kaç günde yapabilir? (Cevap : 10 günde).

Yol gösterme :

İşçi, işi x günde, bitirirse, denklem $\frac{1}{15}+\frac{1}{x}=\frac{1}{6}$ olur.

4–3. BİRİNCİ DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

Tanım : a, b, c birer reel (gerçek) sayı ve $a \neq 0$, $b \neq 0$ olmak üzere; $ax + by = c$ biçimindeki bir denkleme **birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklem** denir.

Örneğin : $a = 3$, $b = 2$, $c = 6$ için, $3x + 2y = 6$ denklemini elde edebiliriz. Bu denklemde x ve y bilinmeyenleri anlatmaktadır. x in her gerçek değeri için, y nin bir gerçek değeri vardır. Gerçekten;

$x = -1$ için, $3.(-1) + 2y = 6 \Leftrightarrow y = \frac{9}{2}$

$x = 0$ için, $3. \quad 0 + 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3$

$x = 1$ için, $3. \quad 1 + 2y = 6 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$

$x = 2$ için, $3. \quad 2 + 2y = 6 \Leftrightarrow y = 0$

$x = 3$ için, $3. \quad 3 + 2y = 6 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}$

değerleri elde edilir. Verilen denklemi gerçekleyen her (x,y) ikilisi, bu iki bilinmeyenli denklemin bir **çözümü** ve bu tür ikililerin oluşturduğu kümeye de **çözüm kümesi** denir. O halde, $3x + 2y = 6$ denkleminin çözüm kümesini oluşturan ikililerden beşi :

$\left(-1, \frac{9}{2}\right)$, $(0,3)$, $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $(2,0)$, $\left(3, -\frac{3}{2}\right)$ olur.

Bu tür ikililerden istenildiği kadar elde etme olanağı vardır. Bu değerlerin bazılarını aşağıdaki tabloda gösterdikten sonra, çözüm kümesini bulalım.

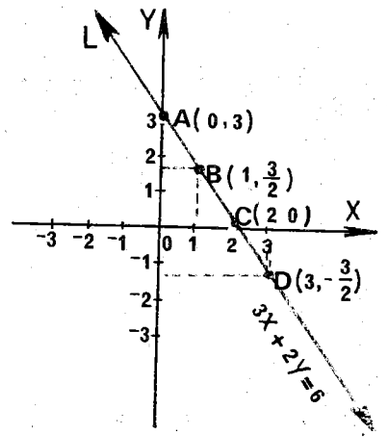
$(3x + 2y = 6)$

x | ...	-2	-1	0	1	2	3	4 ...
y | ...	6	$\frac{9}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-3 ...

Buna göre çözüm kümesi :

$$Ç = \left\{ \ldots, (-2,6), \left(-1, \frac{9}{2}\right), (0,3), \left(1, \frac{3}{2}\right), (2,0), \left(3, -\frac{3}{2}\right), (4, -3), \ldots \right\}$$

olur. Bu çözüm kümesinin elemanlarının düzlemdeki görüntü noktaları, 1. Şekilde gördüğümüz L doğrusudur. $3x + 2y = 6$ eşitliğine uyan her nokta, L doğrusu üzerinde bulunduğuna göre, şekildeki L doğrusunun, $3x + 2y = 6$ iki bilinmeyenli birinci derece denkleminin **grafiği** olduğunu biliyorsunuz. (Kesim : 3.5.2).



1. Şekil

1. Örnek :

$y = 2x$ denkleminin çözüm kümesini bulduktan sonra, grafiğini çizelim.

$y = 2x$ denklemini, $-2x + y = 0$ biçiminde yazabiliriz. Bu denklemde, $ax + by = c$ doğrusal denklemine göre; $a = -2$, $b = 1$, $c = 0$ dır. Buna göre, $-2x + y = 0$ denklemini gerçekleyen bazı ikilileri tabloda gösterelim.

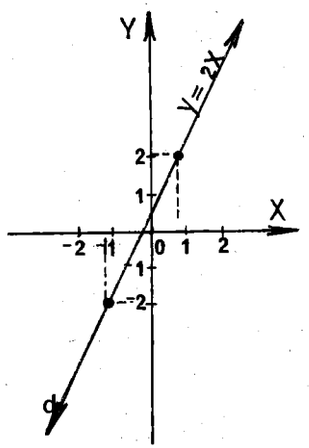
$(-2x + y = 0)$

x | ...	-1	0	1	...
y | ...	-2	0	2	...

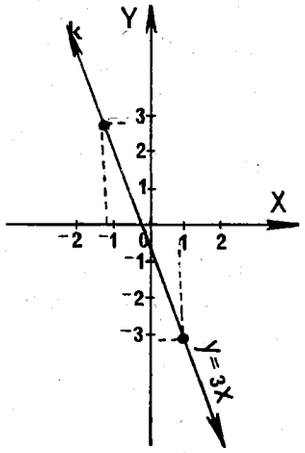
O halde, $y = 2x$ denklemini gerçekleyen kümeyi,

$$Ç = \{ \ldots, (-1, -2), (0,0), (1,2), \ldots \}$$

biçiminde oluşturunuz. Bu kümenin elemanları olan sıralı ikililerin düzlemdeki görüntü noktaları, 2. şekilde gördüğünüz d doğrusunu meydana getirir.



2. Şekil



3. Şekil

2. Örnek :

$y = -3x$ denkleminin çözüm kümesini bulalım ve grafiğini çizelim

$(y = -3x)$

x	...	−1	0	1	...
y	...	3	0	−3	...

$y = -3x$ denkleminin çözüm kümesi :

$$Ç = \{ \ldots, (-1, 3), (0,0), (1, -3), \ldots \}$$

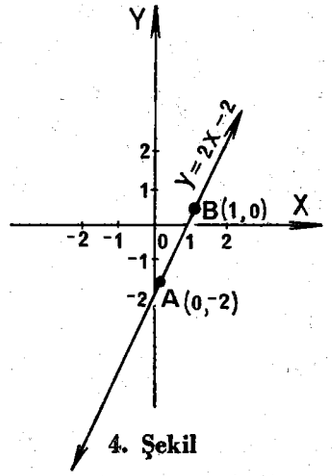
ve grafiği 3. şekilde gördüğünüz k doğrusudur.

3. Örnek :

$y = 2x - 2$ denklemini gerçekleyen ikililerin görüntü noktalarını bulalım.

$x = 0$ için,	$y = 0$ için,
$y = 2x - 2$	$y = 2x - 2$
↓	↓
$y = 2.0 - 2$	$0 = 2x - 2$
$y = 0 - 2$	$2 = 2x$
$y = -2$	$x = 1$
A (0, −2)	B (1, 0)

Verilen denklemi gerçekleyen ikililerin görüntü noktaları, 4. şekilde gördüğünüz AB doğrusudur.



4. Şekil

4. Örnek :

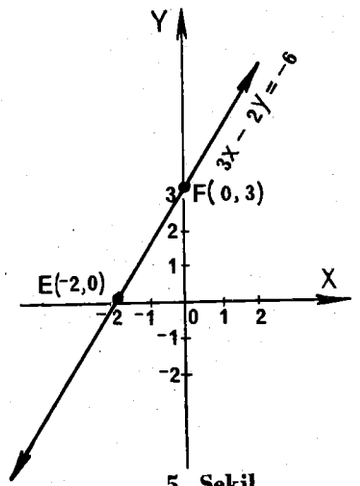
$3x - 2y = -6$ denklemini gerçekleyen ikililerin görüntü noktalarını bulalım.

$x = 0$ için,	$y = 0$ için,
$3x - 2y = -6$	$3x - 2y = -6$
↓	↓
$3.0 - 2y = -6$	$3x - 2.0 = -6$
$0 - 2y = -6$	$3x - 0 = -6$
$y = 3$	$x = -2$
F (0,3)	E (−2,0)

Verilen denklemi gerçekleyen ikililerin görüntü noktaları, 5. şekilde gördüğünüz E F doğrusudur.

5. Örnek :

$x + y = 4$ (1) ve $2x - y = 5$ (2) denklemlerinin ortak çözüm kümesini bulalım.



5. Şekil

Bu tür denkleme, **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir. Bu sistemin çözüm kümesi, bu denklemlerin ikisini birden gerçekleyen x ve y değerlerinin oluşturduğu bir sıralı ikilidir. Bu nedenle, bu sistemin çözüm kümesi; $x + y = 4$ ve $2x - y = 5$ doğrularının çözüm kümelerinin kesişimi olur.

Şimdi, bu denklem sisteminin çözüm kümesinin bulunması yöntemlerini inceleyelim.

I. Grafik Metodu :

$x + y = 4$ ün grafiği :

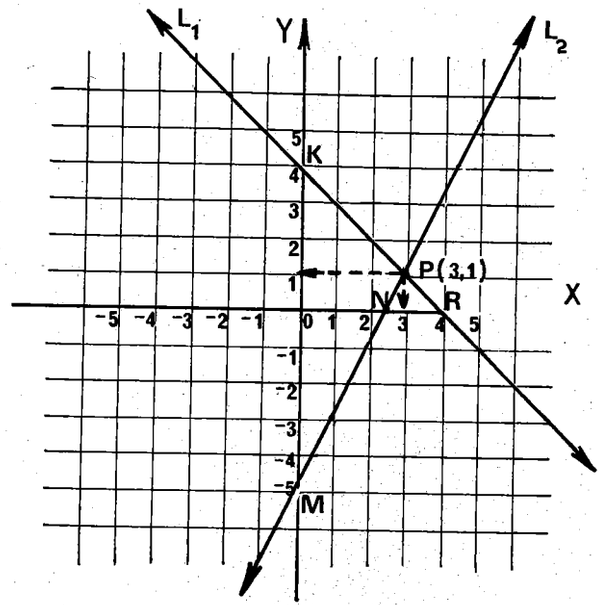
$x = 0$ için,	$y = 0$ için,
$x = y = 4$	$x + y = 4$
↓	↓
$0 + y = 4$	$x + 0 = 4$
$y = 4$	$x = 4$
K (0,4)	R (4,0)

Grafiği, 6. şekildeki L_1 doğrusudur.

$2x - y = 5$ in grafiği :

$x = 0$ için,	$y = 0$ için,
$2x - y = 4$	$2x - y = 5$
↓	↓
$2.0 - y = 5$	$2x - 0 = 5$
$y = -5$	$x = \frac{5}{2}$
M (0, −5)	$N\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

Grafiği, 6. şekildeki L_2 doğrusudur.



6. Şekil

6. şekilde, $L_1 \cap L_2 = \{P\}$ olduğunu görüyorsunuz. Bu grafik üzerinde dikkatli ölçme yapılırsa, P noktasına karşılık olan sıralı ikilinin (3,1) olduğu görülür. O halde, verilen iki bilinmeyenli birinci derece denklem sisteminin çözüm kümesi;

$$Ç = \{(3,1)\} \text{ dir.}$$

II. Karşılaştırma Metodu :

Bu metotta, verilen her iki denklemde de y (ya da x) diğer bilinmeyene bağlı olarak bulunur.

$x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$ (Toplamanın tersi çıkarma),

$2x - y = 5 \Rightarrow y = 2x - 5$ olur. Bunlar eşitlenerek

$2x - 5 = 4 - x$ bir bilinmeyenli denklemi elde edilir.

Buradan,

$2x - 5 = 4 - x \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$ bulunur. x in bu değeri, (1) ve (2) denklemlerinden biiinde yerine konarak y bulunur.

$3 + y = 4 \Leftrightarrow y = 1$ olur.

O halde,

$Ç = \{(3,1)\}$ dir.

III. Yoketme Metodu :

Bu metotta, verilen iki denklemin, her ikisinde de bilinmeyenleriden birinin, katsayılarının eşit olması gerekir. Bu nedenle, verilen denklemlerin bilinmeyenlerinden birinin katsayıları arasında bu koşul yoksa; denklemlerden her birinde, eşitliğin iki yanı, sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılarak, bu koşul gerçekleştirilir. Böylece, elde edilen iki denklem, taraf tarafa toplanıp ya da çıkarılarak, bir bilinmeyenli bir denklem elde edilir. Bu denklemden, bilinmeyenlerden biri bulunur. Diğer bilinmeyen; denklemlerden birinde, ilk bilinmeyenin bulunan bu değeri yerine konularak bulunur.

Örneğin,

$$\begin{array}{rr} x + y = 4 & (1) \\ + \quad 2x - y = 5 & (2) \\ \hline \end{array}$$

(1) ve (2) denklemlerinde, y nin kat sayıları eşit ve ters işaretli olduklarından, denklemler taraf tarafa toplanırsa :

$(x + 2x) + (y - y) = 4 + 5$

$3x + 0 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ tür.

x in bu değeri (1) denkleminde yerine konursa;

$3 + y = 4 \Leftrightarrow y = 1$ ve $Ç = \{(3,1)\}$ olur.

IV. Yerine Koyma Metodu :

Bu metotta, verilen iki denklemin birinden, bilinmeyenin biri, diğeri, türünden bulunur ve diğer denklemde yerine konur. Örneğin, y bulunmuşsa, y nin bu değeri, diğer denklemde yerine konur. Böylece, elde edilen bir bilinmeyenli denklemden x bulunur. x in bulunan değeri, denklemlerden birinde yerine konularak y bulunur.

Buna göre : $x + y = 4$ (1) ve $2x - y = 5$ (2) denklem sisteminde; (2) denkleminde, $2x - y = 5 \Leftrightarrow y = 2x - 5$ olur. (1) denkleminde, y yerine bu değer yazılırsa;

$x + 2x - 5 = 4 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$ bulunur.

x in bu değeri, (1) denkleminde yerine konursa,

$3 + y = 4 \Leftrightarrow y = 1$ ve $Ç = \{(3,1)\}$ olur.

Kontrolü : (= Sağlama)

Çözüm kümesi olarak bulduğumuz $x = 3$ ve $y = 1$ değerleri, (1) ve (2) denklemlerinde yerine konursa :

$x + y = 4$	$2x - y = 5$
$\downarrow$	$\downarrow$
$3 + 1 = 4$	$2.3 - 1 = 5$
$4 = 4$	$5 = 5$

olduğu görülür.

Yukarıda incelediğimiz dört yöntemde de, $x + y = 4$ (1) ve $2x - y = 5$ (2) denklem sistemi için, bulduğumuz çözüm kümelerinin aynı olduğunu görüyorsunuz. Bu nedenle, iki bilinmeyenli bir denklem sistemi çözülürken; verilen sistemin özeliğine göre, bu metotlardan en uygun olan biri tercih edilir.

1. Örnek :

$x + 2y = 6$ ve $x + y = 2$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$$\begin{array}{rr} x + 2y = 6 & (1) \\ \mp x \mp y = \mp 2 & (2) \\ \hline y = 4 \text{ olur.} & \end{array}$$

(1) denkleminde,n (2) denklemi çıkarılırsa, ((2) denkleminde eşitliğin iki yanı -1 ile çarpılır ve denklemler taraf tarafa toplanırsa). y nin bu değeri, (2) denkleminde yerine konursa;

$x + 4 = 2 \Leftrightarrow x = 2 - 4 = -2$ ve $Ç = \{(-2,4)\}$ olur.

2. Örnek :

$3x - y = 9$ ve $x + 3y = 33$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$3x - y = 9$ (1) (1) denkleminde, eşitliğin iki yanı 3 ile çarpılır.
$x + 3y = 33$ (2)

$9x - 3y = 27$ (1) Yoketme metoduna göre, (1) ve (2) denklemleri
$+\ x + 3y = 33$ (2) tarafa taraf toplanır.

$10x = 60 \Leftrightarrow x = 60 : 10 = 6$ dır. x in bu değeri, (2) denkleminde yerine konursa :

$$6 + 3y = 33 \Leftrightarrow y = 9 \text{ ve } Ç = \{(6,9)\} \text{ olur.}$$

3. Örnek :

$5x + 2y = -4$ (1)

$3(x + 8) = 6y$ (2)

Denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm :

$5x + 2y = -4$ (1) (2) denklemine, çarpmanın toplama üzerine
$3(x + 8) = 6y$ (2) dağılma özeliği uygulanır.

$3x + 24 = 6y$ (2) (2) denklemi, (1) denklemine uygun biçimde
$3x - 6y = -24$ (2) düzenlenir.

$15x + 6y = -12$ (1) Denklemler taraf tarafa toplanır.
$+\ 3x - 6y = -24$ (2)

$18x = -36 \Leftrightarrow x = -36 : 18 = -2$ dir.

x in bu değeri, (1) denkleminde yerine konursa;

$5.(-2) + 2y = -4 \Leftrightarrow 2y = -4 + 10 = 6$

$y = 6 : 2 = 3$ ve

$Ç = \{(-2,3)\}$ olur.

4. Örnek :

$$\frac{x+7}{5} - \frac{2x-y}{4} = -2 \qquad (1)$$

$$\frac{3y+2}{2} - \frac{5x-3}{6} = -16 \qquad (2)$$

Denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım :

Çözüm :

$\frac{x+7}{5} - \frac{2x-y}{4} = -2$ (1) Eşitliğin iki yanı, ortak payda olan 20 ile çarpılır.

$\frac{3y+2}{2} - \frac{5x-3}{6} = -16$ (2) Eşitliğin iki yanı ortak payda olan 6 ile çarpılır.

$4(x + 7) - 5(2x - y) = -2.20$ (1) Çarpmanın toplama ve çıkarma

$3(3y + 2) - (5x - 3) = -16.6$ (2) üzerinde dağılma özeliği uygulanır.

$4x + 28 - 10x + 5y = -40$ (1) Benzer terimlerin katsauıları ve bilinmeyenler, eşitliğin bir yanın-

$9y + 6 - 5x + 3 = -96$ (2) da, bilinenler diğer yanında toplanır.

$-6x + 5y = -68$ (1) Eşitliğinin iki yanı, (1) denkle-

$-5x + 9y = -105$ (2) minde 5; (2) denkleminde 6 ile çarpılır.

$-30x + 25y = -340$ (1) (1) denkleminden, (2) denklemi

$\pm 30x \mp 54y = \pm 630$ (2) çıkarılır.

$-29y = 290 \Leftrightarrow y = 290 : -29 = -10$ dur.

y nin bu değeri, (1) denkleminde yerine konursa;

$-6x + 5.(-10) = -68 \Leftrightarrow -6x = -68 + 50 = -18$

$\Leftrightarrow \quad x = -18 : -6 = 4$ ve

$Ç = \{(3, -10)\}$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulduktan sonra, grafiklerini çiziniz.

a) $y = 4x$ b) $y = -4x$

c) $\frac{2}{3}x + y = 0$ d) $2x - 3y = -6$

e) $3x - y = 3$ f) $2x + y = 2$

g) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 2$ h) $\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y = -3$

ı) $-\frac{1}{2}x + y = 1$ i) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = -1$

2. Aşağıdaki denklem sistemlerini çözünüz.

a) $\begin{aligned} x + y &= 11 \\ x - y &= -3 \end{aligned}$ $(x = 4, y = 7)$

b) $\begin{aligned} x - y &= -8 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$ $(x = -3,\ y = 5)$

c) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 29 \\ x - y &= 12 \end{aligned}$ $(x = 7,\ y = -5)$

d) $\begin{aligned} 3x + 4y &= 12 \\ 2x - y &= -14 \end{aligned}$ $(x = -4,\ y = 6)$

e) $\begin{aligned} 4x - 5y &= 8 \\ -2x + 3y &= 0 \end{aligned}$ $(x = 12,\ y = 8)$

f) $\begin{aligned} 5x = 14y &= -37 \\ 3x - 7y &= -53 \end{aligned}$ $(x = -13,\ y = 2)$

g) $\begin{aligned} 2(3x - y) &= 18 \\ 3(2y - x) &= 66 \end{aligned}$ $(x = 8,\ y = 15)$

h) $\begin{aligned} 4(2x + y) &= 28 \\ 5(x + y) &= -10 \end{aligned}$ $(x = 9,\ y = -11)$

ı) $\begin{aligned} 6(2y - 3x) &= -12 \\ 9x - 23 &= 5y \end{aligned}$ $(x = 12,\ y = 17)$

i) $\begin{aligned} 3y - 18 &= 5x \\ 4(x - 2y) &= 8 \end{aligned}$ $(x = -6,\ y = -4)$

j) $\begin{aligned} 7x - 3y &= -3 \\ 4x + 2y &= 28 \end{aligned}$ $(x = 3,\ y = 8)$

k) $\begin{aligned} 3x + 2y &= 3 \\ 2x + 3y &= 17 \end{aligned}$ $(x = -5,\ y = 9)$

l) $\begin{aligned} 5x + 7y + 9 &= 0 \\ 3x + 4y + 6 &= 0 \end{aligned}$ $(x = -6, y = 3)$

m) $\begin{aligned} 4x - 3y - 3 &= 0 \\ 2x + y - 39 &= 0 \end{aligned}$ $(x = 12,\ y = 15)$

n) $\begin{aligned} \frac{x - y}{6} + \frac{x + y}{2} &= -6 \\ \frac{2x + y}{3} - \frac{x - 2y}{2} &= 11 \end{aligned}$ $(x = -14,\ y = 10)$

p) $\begin{aligned} \frac{x + 2y}{4} - \frac{x - 2y}{8} &= -2 \\ \frac{3x + 2y}{8} - \frac{2x + 3y}{2} &= -5 \end{aligned}$ $(x = 20,\ y = -6)$

r) $\begin{aligned} \frac{x + 7}{5} + \frac{x + 3y}{3} &= 8 \\ \frac{x - y}{2} + \frac{y + 10}{5} &= 2 \end{aligned}$ $(x = 3,\ y = 5)$

s) $\dfrac{x+y}{5} - \dfrac{x+2y}{3} = \dfrac{7}{15}$ $\qquad (x = 14,\ y = -5)$

$\dfrac{3x+5y}{7} - \dfrac{x+3y}{2} = \dfrac{41}{14}$

3. Aşağıdaki problemleri uygun denklemler kurarak çözünüz.

a) Öyle iki sayı bulunuz ki, toplamları 55 olsun. Küçük sayının dörtte biri ile büyük sayının beşte biri toplandığında 12 elde edilsin. (Cevap : 20; 35).

b) Ardışık iki tamsayının toplamı 21 dir. Küçük sayının 5 katından, büyük sayının 4 katı çıkarılırsa 6 elde ediliyor. Bu sayıları bulunuz. (Cevap : 10, 11).

c) 2 kğ tereyağı, 3 kğ balın fiyatı 1800 lira; 3 ğ tereyağı ve 2 kğ balın fiyatı ise, 1875 liradır. 1 kg tereyağı ve 1 kg balın fiyatını bulunuz. (Cevap : 1 kg tereyağı 375 lira; 1 kg bal 350 lira).

d) 3 metre yünlü, 4 metre keten kumaşın fiyatı 8050 lira; 4 metre yünlü, 3 metre keten kumaşın fiyatı ise 9100 liradır. Yünlü ve keten kumaşların fiyatlarını bulunuz. (Cevap : Yünlü 1750 L. Keten 700 L).

e) Süha ile annesinin yaşları farkı 28 dir. 4 yıl sonra, annesinin yaşı, Süha'nın yaşının 3 katı olacaktır. Süha ve annesinin şimdiki yaşlarını bulunuz. (Cevap : Süha 10, annesi 38 yaşında) $x - y = 28$ $(x+4) = 3(y+4)$

f) Şermin ile babasının şimdiki yaşları toplamı 54 tür. 3 yıl sonra, babasının yaşı; Şermin'in yaşının 2 katından 12 yaş fazla olacaktır. Şermin ve babasının şimdiki yaşlarını bulunuz. (Cevap : Şermin 13, babası 41 yaşında). $x+y=54$ $\quad 2(x+3)+12 = y+3$

g) İki rakamlı bir sayının, rakamları toplamı 12 dir. Rakamları yer değiştirildiğinde, ilk sayıdan 36 fazla olan bir sayı elde ediliyor. Bu sayıyı bulunuz. (Cevap : 48). $x+y=12$ $\quad (10x+y)+36 = (10y+x)$

Yol gösterme :

Sayı xy olsun, ilk sayının $(10x + y)$ ve rakamları yer değiştirildiğindeki sayının da, $(10y + x)$ olacağını düşününüz.

h) İki rakamlı bir sayının, rakamları toplamının 3 katı 27 dir. Rakamlarının yerleri değiştirildiğinde elde edilen sayı, ilk sayıdan 45 eksik oluyor. Bu sayıyı bulunuz. (Cevap : 72).

i) İki sayı arasındaki fark 65 tir. Bunlardan biri, diğerine bölündüğünde, bölüm 6, kalan 5 tir. Bu sayıları bulunuz. (Cevap : 77; 12).

j) İki sayıdan birinin diğerine bölümünde, bölüm 7, kalan 5 tir. Bölen, bölünen ve kalan toplamı 202 dir. Bu sayıları bulunuz. (Cevap : 173, 24).

j) Ali, Ayşe'ye 10 ceviz verirse, cevizleri eşit oluyor. Ayşe, Ali'ye 10 ceviz verirse, Ali'nin cevizi, Ayşe'nin cevizinin 2 katı oluyor. Ali ve Ayşe'nin kaçar cevizi vardır? (Cevap : Ali'nin 70, Ayşe'nin 50 cevizi vardır).

k) Bir kesrin pay ve paydasına 1 katılırsa, değeri $\frac{1}{2}$ oluyor. Pay ve paydasından 1 çıkarılırsa, değeri $\frac{1}{3}$ oluyor. Bu kesri bulunuz. $\left(\text{Cevap : } \frac{3}{7}\right)$.

l) Uzaklıkları 120 mil olan A ve B limanlarında bulunan iki gemi; karşılıklı yönde hareket ederlerse, 2 saat sonra karşılaşıyorlar. Aynı yönde hareket ederlerse, biri diğerine 10 saat sonra yetişiyor. Bu gemilerin hızını bulunuz. (Cevap : 36 mil/saat, 24 mil/saat). $10x - 10y = 120$ $\quad 2x + 2y = 120$

m) 80000 lira paranın bir kısmı % 36 dan 2 yıl, geri kalanı da % 38 den 3 yıl süreyle bankaya yatırılıyor. Toplam faizleri 70 200 lira olduğuna göre, % 36 dan ve % 38 den yatırılan paraları bulunuz. (Cevap : 50000 L. 30 000 L).

DÖRDÜNCÜ BÖLÜMÜN TEST SORULARI

1. $x = 2$, $y = 3$ için, $6x^2y - 5xy^2 + 4xy$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

a) 0 b) 42 c) 36 d) 24 e) 6

2. Aşağıdakilerden hangisi **yanlıştır**?

a) $(x + 3)(x - 4) = x^2 - x - 12$ b) $(x - 4)^2 = x^2 - 4x + 16$

c) $8a^3b^2 - 4a^2b^3 = 4a^2b^2(2a - b)$

d) $16a^2 - 9b^2 = (4a - 3b)(4a + 3b)$

e) $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = a^2 - a + \frac{1}{4}$

3. $2(3x - 5) = 4(x - 4)$ denkleminin **çözüm kümesi** aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\{-3\}$ b) $\{-11\}$ c) $\{3\}$ d) $\{-4\}$ e) $\{4\}$

4. $\frac{3x}{4} - \frac{x}{8} = 5$ denkleminin **çözüm kümesi** aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\{10\}$ b) $\{5\}$ c) $\{-8\}$ d) $\{8\}$ e) $\{-5\}$

5. $\frac{3}{5}$ şine, 3 katıldığında, 45 olan sayı kaçtır?

a) 75 b) 80 c) 70 d) 27 e) 54

6. 2 katı ile ardışığı olan tamsayının 3 katı toplamı 63 olan tamsayı kaçtır?

a) 12 b) 13 c) 10 d) 15 e) 9

7. $\frac{3}{4}$ ü ile $\frac{1}{3}$ ü arasındaki fark 10 olan sayı kaçtır?

a) 36 b) 48 c) 12 d) 24 e) 60

8. Bir havuzu, iki musluktan biri 140, diğeri 210 dakikada dolduruyor. Bu, İki musluk, aynı havuzu birlikte kaç dakikada doldurur?

a) 42 b) 84 c) 105 d) 70 e) 60

9. $3x - y = 14$ ve $x + 3y = -12$ denklem sisteminin çözüm kümesi nedir?

a) $\{(-3,5)\}$ b) $\{(4,-3)\}$ c) $\{(3,-5)$ d) $\{(3,5)\}$ e) $\{(2,3)\}$

10. $2(3x + 2y) = 4$ ve $3x + 14 = 2y$ denklem sisteminin çözüm çözüm kümesi nedir?

a) $\{(2,4)\}$ b) $\{(-3,2)\}$ c) $\{(2,-4)\}$ d) $\{(4,5)\}$ e) $\{(-2,4)\}$

BEŞİNCİ BÖLÜM

METRİK OLMAYAN GEOMETRİ

5-5.1. BASİT GEOMETRİK ŞEKİLLER

Ortaokul 1. ve 2. sınıfta, doğru parçası, üçgen ve üçgensel bölge, çember ve daire gibi düzlemsel şekilleri incelemiş, dikdörtgenler prizması ve silindir gibi cisimlere de biraz yer vermiştik. Çevremizde gördüklerimizin çoğu, 3-boyutludur. Örneğin, oturduğumuz sıra, bir kaya parçası, daha karışık cisimlerdir. Bunların birçok yüzeyleri ve eğrileri bulunduğu halde, yine 3-boyutlu birer uzay cismidir.

Herhangi bir makina dişlisi, oldukça karmaşık, 3-boyutlu bir cisimdir. Bu cismi, bugüne değin öğrendiğimiz geometri bilgileri ve matematik terimleriyle belirtme olanağımız şimdilik yoktur. Yıldızları, gezegenleri ve uydularıyla gökyüzü; üzerindeki dağları, tepeleri, çukurları, düzlükleri, akarsuları, vadileri ve denizleriyle birlikte, az çok **"küresel"** biçimde olan yeryüzü; evimiz, okulumuz, yollarımız, camiler, saraylar ve bunların benzerleri olan milyarlarca geometrik şekiller, biçimler ve cisimler, geometrinin uğraşısı içindedir.

Bu ve bundan sonraki bölümlerde, içinde yaşadığımız uzayın, geometrisi üzerinde biraz daha ileri seviyede bazı çalışmalar yapacağız. Bu demek değildir ki, gördüğümüz, okuduğumuz, kullandığımız her şeyi anlatmak için hemen bir metot geliştirebiliriz. Ancak, uzay geometrinin basit oluşumları ve basit düzlem şekillerine benzerlikleri yönünden özeliklerini ve düşünme yöntemlerini öğreneceğiz.

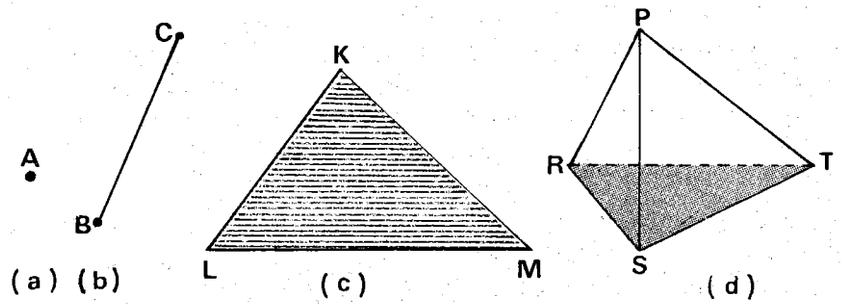
5.1.1. Basitçeliler

Bir noktalar kümesinde, düşünülebilen en basit eleman, bir tek noktadır. İki noktadan oluşan bir küme, bundan sonra düşünülebilen en basit bir noktalar kümesidir. Uzayın farklı herhangi iki noktası, yalnız bir doğru parçasının uç noktalarıdır. Bu doğru parçasının bir uzunluğu vardır. Fakat, genişliği veya kalınlığı yoktur. Bu nedenle, bir doğru parçası için, alan söz konusu olamaz. Bir doğru parçasına ya da bir doğruya **1-boyutlu** deriz. Böylece doğru parçası, uzayda, 1-boyutlu şekillerin en basitidir.

Üç noktadan oluşan bir küme; iki noktadan oluşan bir kümeden sonra uzayın en basit noktalar kümesidir. Eğer, bu kümenin elemanları olan noktalar, bir doğru üzerinde ise, yine doğru parçası elde ederiz. Bu da bize 1-boyutlu bir şekil verir. Öyleyse, bu üç noktanın aynı doğru üzerinde olmadığını farzetmeliyiz. Bu durumda, bu üç noktanın üzerinde bulunduğu yalnız bir düzlem vardır. Köşeleri, bu noktalar olan tek bir üçgen ve sözü edilen bir üçgen ile sınırlı tek bir üçgezsel bölge vardır. İşte, bu üçgenle birlikte içi, üzerinde durmak istediğimiz matematiksel bir şekildir. Bu şeklin bir alanı vardır ve iki boyutludur. Bu, iki boyutlu şekillerin en basiti olarak düşünülebilir.

Bundan sonra, uzaydaki en basit noktalar kümesinin, dört noktalı bir küme olacağı açıktır. Eğer, bu dört noktanın hepsi bir düzlem içinde olsaydı, bu dört noktanın oluşturduğu şekil, yine düzlemde olacaktı. Bu nedenle, bu dört noktanın hepsinin aynı düzlem içinde olmadığını farzediyoruz. Böylece, üç noktanın bir doğru üzerinde bulunamayacağını da garantilemiş oluruz.

Eğer, üç nokta bir doğru üzerinde olsaydı, bu doğru ile dördüncü nokta, bir düzlem belirtecekler ve böylece dört nokta da yine bir düzlemde bulunacaktı. O halde, hepsi bir doğru üzerinde bulunmayan, dört noktanın oluşturduğu bir kümemiz vardır. Bu küme, bizde bir dörtyüzlü fikrini ortaya koyar. **Uzayın dört noktası, yalnız bir dörtyüzlü cismin köşeleridir.** Dörtyüzlü cismin, bir hacmi vardır ve 3-boyutludur. Bu dörtyüzlü, uzayın 3-boyutlu şekillerinin en basiti olarak düşünülebilir.



1. Şekil

Buraya değin elde ettiğimiz dört kümenin herbiri, kendi türünde en basit şekil olarak ele alınmıştır. Bunlar arasında önemli benzerlikler vardır. Bunların herbirine **basitçeli** denir. Ayrıca, doğal boyutlarını da yanlarına ekleyerek, böylece, bir noktadan oluşan bir kümeye; **0 -basitçeli** diyeceğiz. Bir doğru parçasına **1 - basitçeli**, içiyle beraber bir üçgene **2 - basitçeli**, içiyle beraber bir dört yüzüyle **3 - basitçeli** denir.

1. Şekil : (a) da, 0 - basitçeliyi; (b) de, 1 - basitçeliyi; (c) de, 2 - basitçeliyi (d) de de, 3 - basitçeliyi görüyorsunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. Doğrusal olmayan A, B, C noktaları veriliyor. Bu noktaları birleştirerek elde ettiğiniz şekli tarayınız, ya da boyayınız.

a) Elde ettiğiniz şekil kaç boyutludur?

b) Bu şekilde, kenar olarak kaç tane 1 - basitçeli vardır?

c) Bu şekilde, köşe olarak kaç tane 0 - basitçeli vardır?

2. Bir, 1 - basitçelide, köşe olarak kaç 0 - basitçeli vardır?

3. Bir dörtyüzlü (3 - basitçeli) de :

a) Köşe olarak kaç tane 0 - basitçeli vardır?

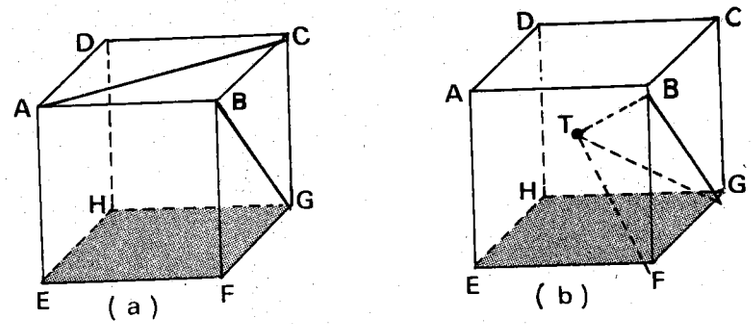
b) Kenar olarak kaç tane 1 - basitçeli vardır?

c) Yüz olarak kaç tane 2 - basitçeli vardır?

5-2. ÇOKYÜZLÜLER

Bir çokyüzlü sonlu sayıda basitçelilerin birleşiminden oluşur. Bu nedenle, bir çokyüzlü, bir tek basitçeliden oluştuğu gibi belki 5, belki 50, belki de 5 000 000 basitçelilerin birleşimi olabilir. Belli sayıdaki basitçelilerin birleşimiyle oluşan bir çokyüzlü nasıl olmalıdır? Örneğin, bir küpü ele alalım.

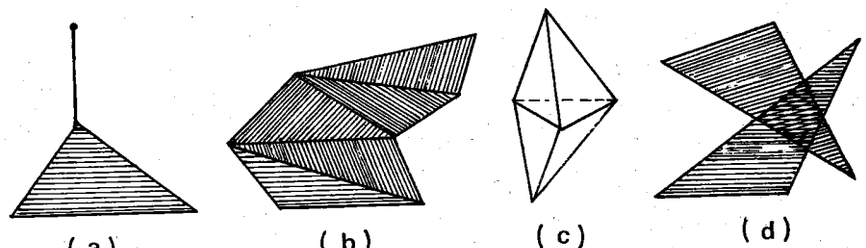
2. Şekilde, iki küp şekli görülmektedir. Bir küpün, kenarlarının (1 - basitçelilerin) birleşimi, 1 - boyutlu bir çokyüzlüdür. Bu çokyüzlünün her biri kare olan 6 eş kapalı çokgeni bulunmaktadır. Bunlardan biri : [AE] [EF], [FB] ve [BA] nın birleşimi olan, A E F B karesidir. Bir küpün, her yüzü iki tane 2 - basitçelinin birleşimidir. 2. Şekil (a), bu koşulu göstermektedir. Gerçekten, ABCD yüzü, (ABC) ve (ACD) 2 - basitçelilerinin (üçgensel bölgelerinin) FGCB yüzü de (BFG ve



2. Şekil

(BGC) 2 – basitçelilerinin birleşimi olarak görülmektedir. Şekilde, diğer yüzler, alt bölümlere ayrılmamakla birlikte, onları da iki tane 2 – basitçelinin birleşimi olarak gösterebiliriz. Böylece, küpün yüzeyi, 12 tane 2 – basitçelinin birleşimi olur.

Küp cisminin, yukarıdaki 2. şekil (b) de gördüğünüz gibi, 3 – basitçelilerin (dörtyüzlü cisimlerin) birleşimi olduğunu gösterebiliriz Gerçekten, küpün içinde herhangi bir T noktası alalım. Yüzeyin herhangi bir 2 – basitçelisi, örneğin, BFG için, TFGB bir 3 – basitçelidir. 2. Şekil (b) deki T noktası, küpün içindedir. Ayrıca [TF], [TG] ve [TB] 1 – basitçelileri de küpün içindedir. Böylece, yüzeydeki 12 tane 2 – basitçeliden ötürü, 12 tane 3 – basitçeli birleşerek küpü oluşturmaktadır. O halde, küp cismi, 3 – basitçelilerin bir birleşimidir.



3. Şekil

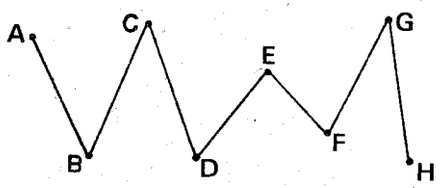
Yukarıdaki 3. şekiller, basitçelilerin birleşimini göstermektedir. (a) şekli, 1 – basitçeli ile içinde 1 – basitçeli bulunmayan bir 2 – basitçelinin birleşimidir. Böyle bir şekle, **karma boyutlu şekil** denir. İncelemelerimizde, karma boyutlu çokyüzlüler üzerinde durmayacağız. (b) deki şekilde, iyice kesişen 5 tane 2 – basitçelinin (üçgensel bölgelerin) birleşimiyle oluşan bir çokyüzlüyü görüyorsunuz. (c) deki şekilde, iki 3 – basitçelinin arakesitlerinin, bir 2 – basitçeli olduğunu görmektesiniz. (d) şeklinde ise, iyice kesişmeyen iki 2 – basitçelinin (üçgensel bölgelerin) birleşimiyle oluşan bir çokyüzlüyü görüyorsunuz. Biz, burada böyle iyice kesişmeyen basitçelilerin birleşiminden oluşan çokyüzlüler üzerinde de durmayacağız. Şimdi, iyice kesişen basitçelileri tanımlayalım.

Tanım : Eğer, boyutları aynı olan iki basitçelinin arakesiti, her ikisinin ortak bir yüzü, bir kenarı ya da bir köşesi ise, bu iki basitçeliye iyice kesişiyorlar denir.

5–2.1. Bir Boyutlu Çokyüzlüler

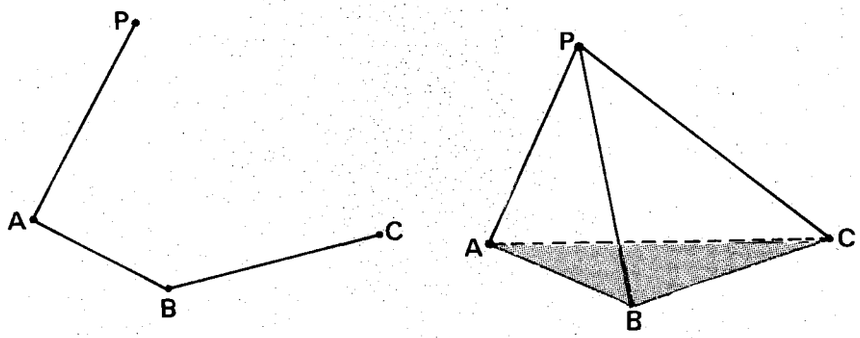
1 – Boyutlu çokyüzlüler, belli sayıdaki 1 – basitçelilerin (Doğru parçalarının) birleşimidir. 1 – Boyutlu bir çokyüzlü, düzlemsel olabileceği gibi, bir düzlem içinde olmayabilir de. Örneğin, bir dörtyüzlünün kenarlarının birleşimi, 1 – boyutlu bir çokyüzlüdür. Bu çokyüzlü, 6 tane 1 – basitçelinin birleşimidir. Bu birleşim, düzlemsel değildir.

4. Şekil, bir düzlem (kâğıt düzlemi) içinde bulunan 1 – boyutlu bir çokyüzlüdür.



4. Şekil

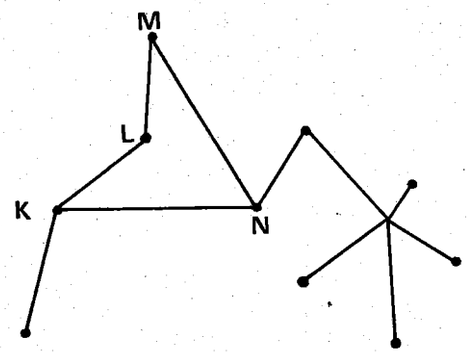
Bu şekilde gördüğünüz gibi, 1 – basitçelilerin, kendisinden önce gelen 1 – basitçeli ile tek bir ortak köşesi varsa; böyle sıralanmış olan 1 – basitçelilere, **çokgensel çizgi** denir. Çokgensel çizginin başlangıç ve bitişteki köşelerine (noktalarına), uç noktaları adı verilir.



5. Şekil

5. Şekilde gördüğünüz, P, A, B, C noktaları düzlemsel değildir. Şekil (a) da, [PA], [AB] ve [BC] doğru parçalarının birleşimi, P den C ye değin (uç noktaları P ve C olan) çokgensel bir çizgidir. [PC] 1 –basitçelisinin kendisi de, P den C ye değin çokgensel bir çizgidir. Şimdi de, P den C ye değin diğer çokgensel çizgileri bulursak, 5. Şekil (b) de gördüğünüz dörtyüzlüyü elde ederiz.

Tanım : Uç noktaları ortak olan çokgensel iki çizginin birleşimine, basit kapalı çokgen ya da basit kapalı eğri denir.



6. Şekil

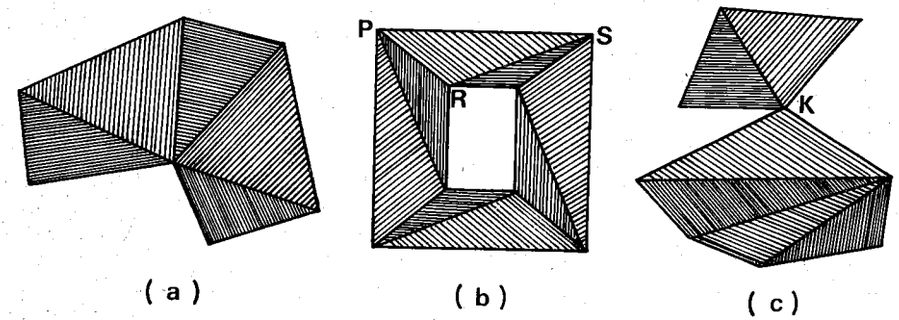
6. Şekil, bütünüyle basit kapalı bir çokgen değildir. Fakat ortak uç noktaları K ve M olan, KLM ve KNM çokgensel çizgilerinin birleşiminden oluşan, KLMN çokgeni, basit kapalı bir çokgendir. Buna göre, basit kapalı bir çokgen : bir parça halinde 1 – boyutlu

bir çokyüzlü olup, her köşesinde yalnız iki tane 1 – basitçeli vardır, diye de tanımlanabilir. O halde, KLMN basit kapalı çokgeni : [KL], [LM], [MN] ve [NK] doğru parçalarının birleşimine eşittir.

Böylece herhangi bir basit kapalı çokgende, 1 – basitçelilerin (kenarların) sayısının, köşelerin sayısına eşit olduğu sonucunu elde ederiz.

5.2.2. İki Boyutlu Çokyüzlüler

2 - Boyutlu bir çokyüzlü, 2 – basitçelerin bir birleşimidir. Başka bir deyişle, bu 2 – basitçelilerin iyice kesiştiklerini varsayacağız. Yani, iki 2 – basitçeli kesişiyorsa, bu arakesit her ikisinin ortak bir köşesidir. 2 – boyutlu çokyüzlülerin birçok çeşitleri vardır. Bunların bazıları düzlemsel olduğu halde, birçoğu düzlemsel değildir. Örneğin, bir dörtyüzlünün yüzeyi, herhangi bir düzlem içinde değildir. Küpün, dikdörtgenler prizmasının, piramidin yüzeyleri; düzlemsel olmayan 2 – boyutlu çokyüzlüler için başka birer örnektir.

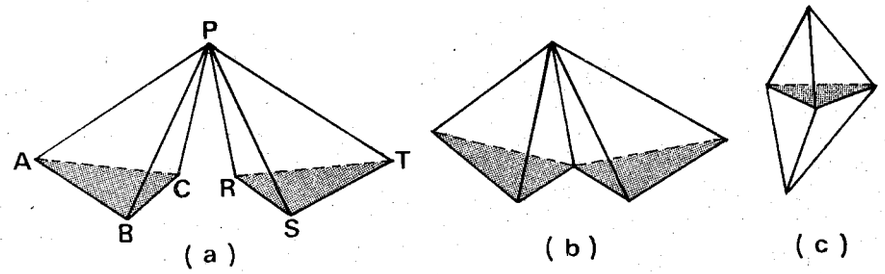


7. Şekil

Yukarıda gördüğünüz 7. şekildekiler, düzlemsel olan 2 – boyutlu çokyüzlüler için birer örnektir. Şekil (a), 5 tane 2 – basitçelinin birleşimidir. Düzlemsel 2 – boyutlu her çokyüzlünün, içinde bulunduğu düzlemde bir çevresi bulunmaktadır. Bu çevre, 1 – boyutlu bir çokyüzlüdür. Çevre Şekil (a) da gördüğünüz gibi, sabit kapalı bir çokgen olabilir. Şekil (b) de gördüğünüz çok yüzlü, 8 tane 2 – basitçelinin birleşimidir. Bu 2 – basitçelilerden biri, PRS üçgensel bölgesidir. Bu çokyüzlünün çevresi basit, kapalı ve biri içte, diğeri dışta olan iki çokgenin birleşimine aittir. Bu iki çokgen kesişmezler.

Şekil (c) ise, 6 tane 2 – basitçelinin birleşimi olan 2 – boyutlu bir çokyüzlüdür. Bu çokyüzlünün düzlemdeki çevresi, K noktasında ortak bir köşeleri bulunan basit kapalı iki çokgenin birleşiminden oluşmuştur.

5–2.3. Üç Boyutlu Çokyüzlüler



8. Şekil

Yakarıda gördüğünüz 8. Şekildekiler, 3 – boyutlu çokyüzlüler için birer örnektir. Her 3 – basitçeli, 3 – boyutlu bir çokyüzlüdür. Bir küp, bir dikdörtgenler prizması ve piramit cisimleri, 3 – boyutlu çokyüzlüler için başka örneklerdir. 3 – boyutlu bir çokyüzlü, iyice kesişen herhangi bir sayıdaki 3 – basitçelilerin birleşimiyle oluşur. İyice kesişen, iki 3 – basitçelinin arakesiti : 8. Şekil (a) da gördüğünüz gibi, her ikisinde de ortak olan bir **köşe** (0 – basitçeli); 8. Şekil b deki gibi, ortak bir kenar (1 – basitçeli); ya da 8. Şekil (c) deki gibi, iki boyutlu bir yüz (2 – basitçeli) dir.

3 – boyutlu bir çokyüzlünün uzayda bir yüzeyi (sınır) vardır. Bu yüzeyin kendisi de, 2 – boyutlu bir çokyüzlüdür. Bu yüzey, iyice kesişen birçok 2 – basitçelinin birleşimidir.

3 – boyutlu çokyüzlülerin en basit türden olan yüzeylerine, **basit yüzeyler** adı verilir. Örneğin, bir küpün yüzeyi basit bir yüzeydir.

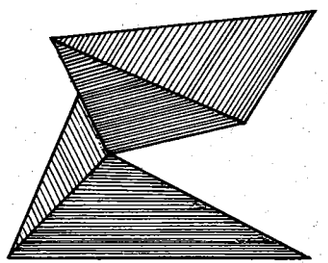
ALIŞTIRMALAR

1. Üç tane iki basitçeliyi öyle çiziniz ki, bunların arakesiti herbirinin birer köşesi olsun, fakat herhangi ikisinin başka ortak noktası bulunmasın.

2. İyice kesişen ve birleşimleri bir 2 – basitçeli olan dört 2 – basitçeli çiziniz.

Yol gösterme :

Bir 2 – basitçeliden başlayınız ve bunu alt bölümlere ayırınız.



9. Şekil

3. 9. Şekil, iyice kesişmeyen 2 – basitçelilerin birleşimiyle oluşmuş bir çokyüzlüdür.

a) Bu şeklin, uygun yerlerine öyle üç doğru parçası çiziniz ki, bu şekil, iyice kesişen 2 – basitçelilerin birleşimiyle oluşan bir çokyüzlü olsun.

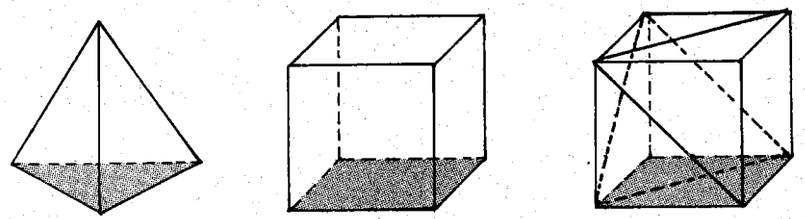
b) (a) da sözü edilen doğru parçalarını çizerek, bu şekli tamamladıktan sonra, bu birleşim ve çevresi için ne düşünürsünüz?

4. Çevresi, kesişmeyen iki basit kapalı çokgenin birleşiminden oluşan herhangi bir çokyüzlü çiziniz.

5. Arakesitleri, hepsinde ortak bir köşe (0 – basitçeli) olan üç dörtyüzlü (3 – basitçeli) çiziniz ve bu birleşimin özeliklerini açıklayınız.

5.3 – KÖŞELERİN, YÜZLERİN VE AYRITLARIN SAYILMASI

Aşağıdaki şekilleri inceleyiniz. Bunların kaç köşesi, kaç kenarı, kaç yüzü olduğunu sayınız? Bu şekillerin yüzeylerinin basit yüzeyler olduğunu unutmayınız.



(a) (b) (c)

Bir küpün, 10. Şekil (b) de gördüğünüz gibi, 6 eş (her yüz karesel bölge) yüzü, 8 köşesi ve 12 kenarı (ayrıtı) vardır. 10. Şekil (c) de, küpün kare olan her yüzünün iki tane iki basitçeliye ayrılmış olduğunu görmektesiniz. Bu şekilde, köşe sayısı değişmediği halde, yüzlerin ve kenarların sayısı değişmektedir. Yüzlerin sayısını Y, kenarının (ayrıtların) sayısını A ve köşelerin sayısını da K harfleri ile gösterelim. Yukarıdaki şekillerin yüz, kenar ve köşe sayıları için aşağıdaki çizelgeyi yapalım.

	Y	A	K
Şekil (a) da (dörtyüzlü)	4	6	4
Şekil (b) de (küp)	6	12	8
Şekil (c) de (her yüz 2 – Basitçeli)	12	18	8

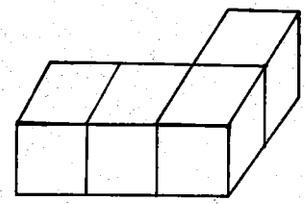
Bu çizelgeye göre, yüzeyleri basit birer yüzey olan bu şekillerin yüz, kenar ve köşeleri arasında $K + Y - A = 2$ olduğunu görüyor musunuz?

18. yüzyılda yaşamış ve meşhur bir matematikçi olan Euler tarafından bulunmuş bu, $K + Y - A = 2$ bağıntısına **Euler (Öyler diye okunur) formülü** denir.

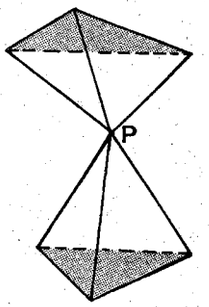
Başka bir örnek, 11. Şekilde, dört küp cismi bir arya konmuştur. Bu birleşimin yüzeyi, basit bir yüzey olup; $K = 20$, $Y = 18$ ve $A = 36$ olduğundan :

$K + Y - A = (20 + 18) - 36 = 38 - 36 = 2$ elde edilir.

Bu formülün, basit olmayan yüzler için, genel olarak gerçeklenmediğini beraber inceleyelim.



11. Şekil



12. Şekil

12. Şekil, P tepeleri ortak olan iki dörtyüzlünün birleşimiyle oluşmuştur. Bu birleşimin yüzeyi, basit bir yüzey değildir. Bu şekilde, $K = 7$, $Y = 8$ ve $A = 12$ olduğundan :

$$K + Y - A = (7 + 8) - 12$$
$$= 15 - 12$$
$$= 3 \text{ tür.}$$

Buradan,

$K + Y - A \neq 2$ olduğu anlaşılır.

Öte yandan, ayrı ayrı her dörtyüzlü için, $K + Y - A = 2$ dir. Burada, $K + Y - A = 3$ olmasının nedeni: 12. Şekilde, P köşesinin, birleşimden önce, her iki dörtyüzlünün birer köşesi olduğu halde, birleşimin ortak bir köşesi (arakesiti) olmasındandır.

Her düzlemsel ve kapalı bir şeklin, (üçgen, dörtgen, çember vb.) içinde bulunduğu düzlemi; biri iç, diğeri dış olmak üzere iki bölgeye ayırdığını biliyorsunuz.

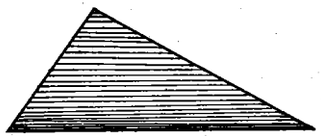
Euler'in $K + Y - A = 2$ formülü, düzlemsel olan kapalı şekiller için de uygulanabilir.

1. Örnek :

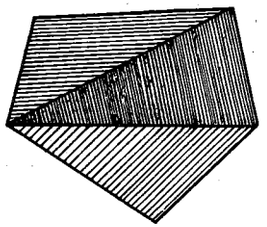
13. Şekildeki, PRS üçgeni, düzlemi biri iç (üçgensel bölge), diğeri dış bölge olmak üzere, iki bölgeye ayırır. Bu nedenle, $Y = 2$ olur. Bu üçgende, $K = 3$ ve $A = 3$ olduğundan :

$$K + Y - A = (3 + 2) - 3$$
$$= 5 - 3 = 2$$

olduğu görülür.



13. Şekil



14. Şekil

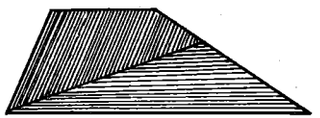
2. Örnek :

14. Şekil, iyice kesişen 2 – basitçelilerin birleşimi olan 2 – boyutlu bir çokyüzlüdür. Bu şekilde, yüz; 3 iç ve 1 dış bölge olmak üzere, $Y = 3 + 1 = 4$, $K = 5$ ve $A = 7$ dir.

Buradan,

$$K + Y - A = (5 + 4) - 7$$
$$= 9 - 7 = 2$$

olur.



15. Şekil

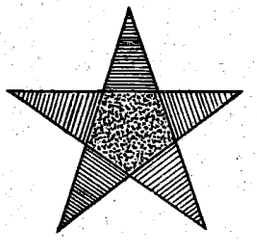
3. Örnek :

15. Şekilde, yüz; 2 iç ve 1 dış bölge olmak üzere, $Y = 2 + 1 = 3$, $K = 5$ ve $A = 6$ dır.

Öyleyse,

$$K + Y - A = (5 + 3) - 6$$
$$= 8 - 6 = 2$$

dir.



16. Şekil

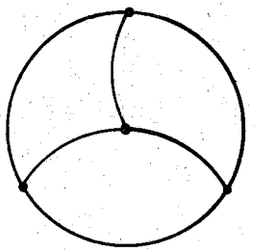
4. Örnek :

16. Şekilde, $Y = 6 + 1 = 7$, $K = 10$, $A = 15$ tir.

O halde,

$$K + Y - A = (10 + 7) - 15$$
$$= 17 - 15 = 2$$

olduğu görülür.



17. Şekil

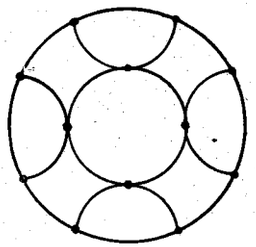
5. Örnek :

17. Şekilde, $Y = 3 + 1 = 4$, $K = 4$ ve kenarlar (yaylar) $A = 6$ dır.

Buradan,

$$K + Y - A = (4 + 4) - 6$$
$$= 8 - 6 = 2$$

bulunur.



18. Şekil

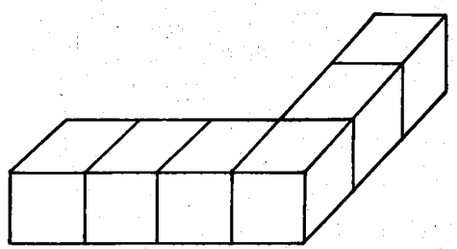
6. Örnek :

18. Şekilde, $Y = 9 + 1 = 10$, $K = 12$ ve yaylar $A = 20$ dir. Buradan,

$$K + Y - A = (12 + 10) - 20$$
$$= 22 - 20 = 2$$

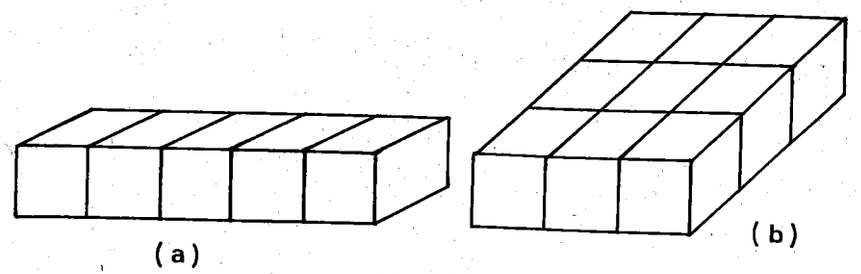
olduğu görülür.

ALIŞTIRMALAR



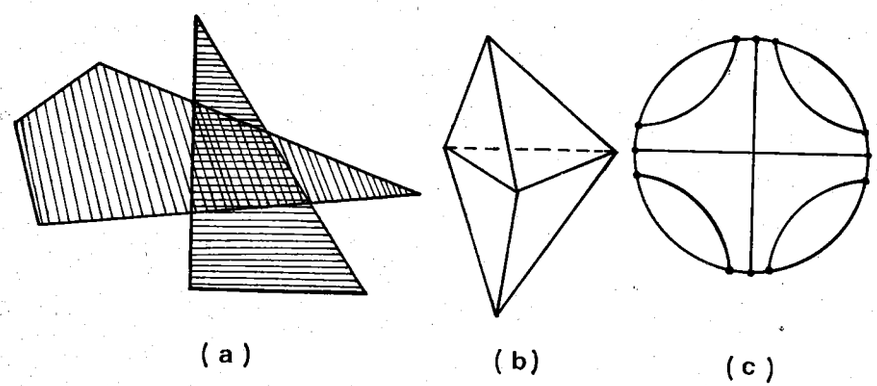
19. Şekil

1. 19. Şekilde gördüğünüz çokyüzlü, altı küp cisminin birleşiminden oluşuştur. Bu çok yüzlü de, K, Y ve A ları sayınız ve $K + Y - A$ yı hesaplayınız. ($K = 28$ bulmalısınız.)



20. Şekil

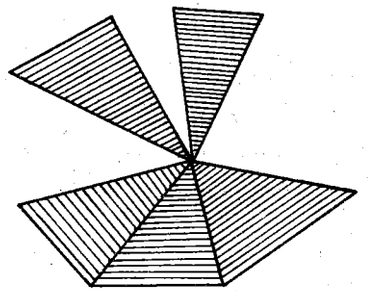
2. 20 şekilde gördüğünüz iki çokyüzlü, küp cisimlerinin birleşiminden oluşmuştur. Her iki çokyüzlüde de K, Y ve A ları sayınız ve her biri için, $K + Y - A$ yı hesaplayınız. ((a) için, $K = 24$ ve, b) için, $K = 32$ bulmalısınız.)



21. Şekil

3. 21. Şekildeki, K, Y ve A ları sayınız ve her biri için, $K + Y - A$ yı hesaplayınız.

BEŞİNCİ BÖLÜMÜN TEST SORULARI



22. Şekil

1. 22. Şekilde, köşe olarak kaç tane (sıfır) 0 – basitçeli vardır?

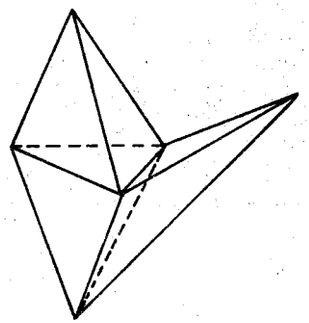
a) 8 b) 10 c) 9 d) 13 Hiç biri.

2. 22. Şekilde, kenar olarak kaç tane 1 – basitçeli vardır?

a) 13 b) 15 c) 12 d) 11 e) Hiç biri.

3. 22. Şekilde, yüz olarak kaç tane 2 – basitçeli vardır?

a) 1 b) 6 c) 4 d) 5 e) Hiç biri.



23. Şekil

4. 23. Şekilde, köşe olarak kaç tane (sıfır) 0 basitçeli vardır?

a) 12 b) 6 c) 9 d) 7 e) Hiç biri.

5. 23. Şekilde, kenar olarak kaç tane 1 – basitçeli vardır?

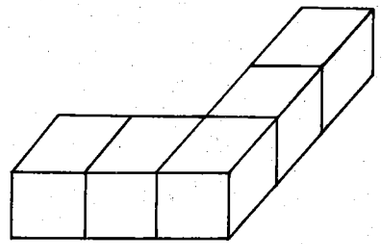
a) 10 b) 18 c) 11 d) 12 e) Hiç biri.

6. 23. Şekilde, yüz olarak kaç tane 2 – basitçeli vardır?

a) 8 b) 9 c) 12 d) 10 e) Hiç biri.

7. 23. Şekil, kaç tane 3 – basitçeliden oluşmuştur?

a) 1 b) 4 c) 3 d) 2 e) Hiç biri.



24. Şekil

8. 24. Şekilde, köşe olarak kaç tane (sıfır) 0 – basitçeli vardır.

a) 30 b) 24 c) 40 d) 48 e) Hiç biri.

9. 24. Şekilde, kenar olarak kaç tane 1 – basitçeli vardır?

a) 44 b) 60 c) 36 d) 30 e) Hiç biri.

10. 24. Şekilde, yüz olarak kaç tane 2 – basitçeli vardır?

a) 24 b) 36 c) 30 d) 22 e) Hiç biri.

ALTINCI BÖLÜM

YÜZEY ÖLÇÜLERİ VE HACİMLER

6-1. DÜZLEM ŞEKİLLERİN ALANLARI

Daha önceki sınıflarda, ölçülerle ilgili olarak yaptığımız hesaplamalarda, düzlem şekilerin içindeki alanın nasıl bulunacağını öğrenmiştiniz. Bu bölümde, bunları daha genişçe tekrarlamakla birlikte, yeni geometrik şekilleri de tanıtacağız.

Bir yüzün kapsadığı birim karelerin sayısına, bu yüzeyin alanı denir. Örneğin, bir üçgenin alanı deyince kapalı üçgensel bölgenin (üçgen ile içinin birleşimidir) alanından söz ettiğimiz anlaşılmalıdır.

6-1.1. Dikdörtgenin Alanı

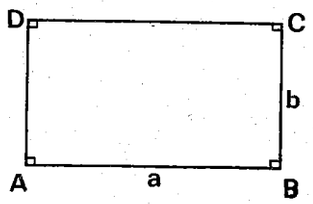
Bir dikdörtgenin alanı deyince, kapalı dikdörtgensel bölgenin ala nından söz ediyoruz demektir.

Bir dikdörtgenin alanını bulmak için, ardışık iki kenarını (uzunluğu ile genişliği) çarptığımızı hatırlayınız. Bu kuralı, formül olarak ifade etmek gerekirse; 1. Şekildeki ABCD dikdörtgeni için,

$$A_{\blacksquare} = a \cdot b$$

dir.

Burada [AB] kenarına dikdörtgenin tabanı, [BC] kenarına da yüksekliği dersek, dikdörtgenin alanı, tabanı ile yüksekliğinin çarpımına eşit olur.



1. Şekil

Örnek :

Ardışık kenarları a = 9 cm, b = 6 cm olan dikdörtgenina anı;

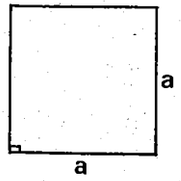
$$A = a \cdot b = 9 \cdot 54 \text{ cm}^2 \text{ dir.}$$

6-1.2. Karenin Alanı

Dikdörtgende bitişik kenarlar eş ise, (2. Şekil) şekil bir karedir. O halde, karenin alan formülü;

$$A_{\blacksquare} = a.a = a^2$$

dir.



2. Şekil

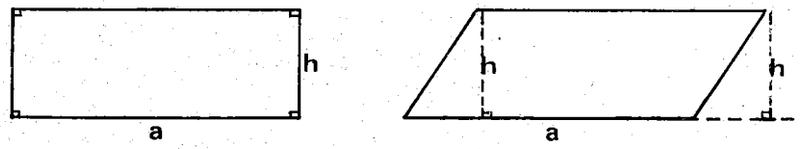
Örnek :

Kenarı a = 12 cm olan karenin alanı;

$$A = a^2 = 12^2 = 144 \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

6-1.3. Paralelkenarın Alanı

Aşağıdaki şekillerde gördüğünüz gibi, bir paralelkenarın alanı, yüksekliği ve tabanı aynı olan bir dikdörtgenin alanına eşittir.



3. Şekil

Paralelkenarın alan formülü,

$$A_{\blacksquare} = a.h$$

dir.

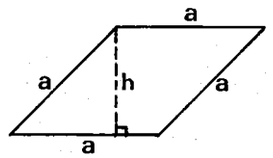
6–1.4 Eşkenar Dörtgenin Alanı

4. Şekilde gördüğünüz gibi, bitişik kenarı eş olan paralelkenara, **eşkenar dörtgen** denir.

Eşkenar dörtgenin de, bir paralelkenar olması nedeniyle., alanı;

$$A_{\blacksquare} = a.h$$

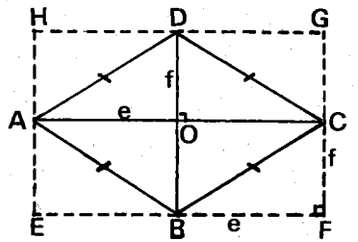
dir.



4. Şekil

Ayrıca, eşkenar dörtgenin alanı, köşegen uzunlukları ile de bulunabilir.

5. Şekilde gördüğünüz gibi, ABCD eşkenar dörtgeninde, köşegenler birbirini dik alarak ortalar.



5. Şekil

$$[AC] \perp [BD], \quad |AO| = |OC| = \frac{|AC|}{2} = \frac{e}{2}$$

ve

$$|BO| = |OD| = \frac{|BD|}{2} = \frac{f}{2}$$

dir.

$$[AC] \;//\; [EF] \;//\; [HG]$$
$$[BD] \;//\; [EH] \;//\; [FG]$$

ve

çizilirse, EFGH bir dikdörtgen olur. Niçin? Bu dikdörtgenin ardışık kenarları, $|EF| = e$ ve $|FG| = f$ olup, alanı $A_1 = e.f$ dir. Diğer yandan, ABCD eşkenar dörtgeninin alanı, EFGH dikdörtgeninin alanının yarısına eşittir. Niçin? (5. Şekildeki küçük üçgenlerin alanlarının birbirlerine eş olduğunu görünüz).

Buradan, genel olarak, köşegenleri e ve f olan bir eşkenar dörtgenin alanı;

$$A = \frac{e.f}{2}$$

olur.

1. Örnek :

Kenarı $a = 6$ cm, yüksekliği $h = 4$ cm olan eşkenar dörtgenin alanı;

$$A = a.h = 6.4 = 24 \text{ cm}^2 \text{ dir.}$$

2. Örnek :

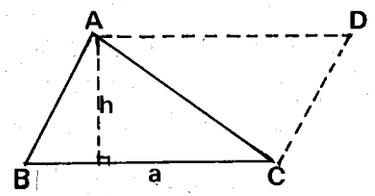
Köşegenleri $e = 8$ cm, $f = 5$ cm olan eşkenar dörtgenin alanı;

$$A = \frac{e.f}{2} = \frac{8.5}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm}^2 \text{ dir.}$$

6–1.5. Üçgenin Alanı

Bir üçgenin alanını; üçgeni, bir paralelkenarla karşılaştırarak bulma olanağı vardır. Herhangi bir ABC üçgeninde, [BC] // [AD] ve [AB] // [CD] çizilirse, 6. Şekilde görüldüğü gibi, BCDA paralelkenarı elde edilir. [CA] köşegeni, bu paralelkenarın içini, alanları eş iki bölgeye ayırır.

Böylece, $\widehat{ABC}$ üçgeninin alanı, BCDA paralelkenarının alanının



6. Şekil

yarısına eşit olur. Öyleyse, $\widehat{ABC}$ üçgeninin alanı için;

$$A = \frac{1}{2} a.h$$

formülü elde edilir.

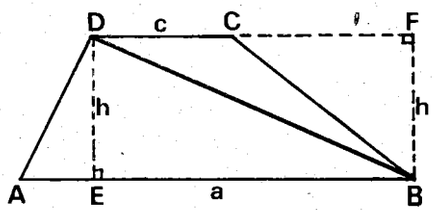
Buna göre, bir üçgenin alanı, herhangi bir tabanı ile bu tabana ait yüksekliğin uzunlukları çarpımının yarısına eşittir.

Örnek :

Taban uzunluğu a = 13 cm ve bu tabana ait yüksekliği h = 8 cm olan üçgenin alanı;

$$A = \frac{1}{2} . 13.8 = 52 \text{ cm}^2 \text{ dir.}$$

6–1.6. Yamuğun Alanı



7. Şekil

Yalnız iki kenarı paralel olan dörtgene yamuk dediğimizi biliyorsunuz. 7. Şekil bir yamuk olup, [AB] // [CD] dir. ABCD yamuğunun [BD] köşegeni çizilirse, bu yamuğun içi DAB ve BDC üçgensel bölgelerine ayrılır. Bu iki üçgenin, ölçüleri farklı a ve c tabanlarına ait yükseklikleri | DE | = | BF | = h olup; eşittir. ABCD yamuğunun alanı, bu iki üçgenin alanlarının toplamına eşittir. Bu nedenle,

(ABCD) alanı = (DAB) . alanı + (BCD) . alanı

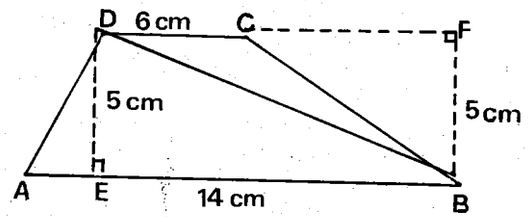
$$\text{(ABCD) alanı} = \frac{1}{2} a.h + \frac{1}{2} c.h$$

$$\text{(ABCD) alanı} = \frac{1}{2} (a + c) . h \text{ (Dağılma özeliği olur).}$$

Buna göre, bir yamuğun alanı, taban uzunlukları toplamı ile yüksekliğinin çarpımının yarısına eşittir.

Örnek :

8. Şekildeki ABCD yamuğunun alanını bulalım.



8. Şekil

Çözüm :

I. Yol :

$$A\ (DAB) = \frac{1}{2} . 14.5 = 35 \text{ cm}^2$$

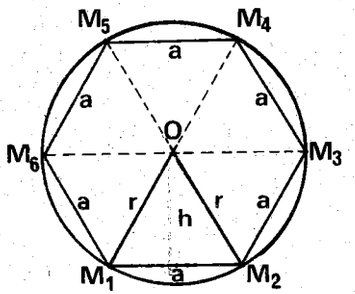
$$A\ (BCD) = \frac{1}{2} . 6.5 = 15 \text{ cm}^2$$

$$A\ (ABCD) = 35 + 15 = 50 \text{ cm}^2 \text{ dir.}$$

II. Yol :

$$A\ (ABCD) = \frac{1}{2}\ (14 + 6)\ .\ 5 = \frac{1}{2}\ .\ 100 = 50\ cm^2\ olur.$$

6–1.7. Düzgün Bir Çokgenin Alanı



9. Şekil

9. Şekildeki, merkezi O ve yarıçapı r olan çemberi, uç uca n tane eş yaya bölelim. (9. Şekil, n = 6 halini göstermektedir). Her yaya karşılık gelen kirişi de çizelim. Böylece, köşeleri M_1, M_2, M_3,... olan bir çokgen elde ederiz. Yaylar, eş olduğundan, kirişler de (bu kirişler, sözü edilen çokgenin kenarlarıdır) eş olur.

Çemberin O merkezini, çokgenin köşelerine, doğru parçalarıyla (Çemberin yarıçap uzunlukları) birleştirirsek, n tane ikizkenar üçgen (şeklimizde 6 tane) elde ederiz.

"Geçen yıldan, bir çemberde eş yayların uç noktalarını, çemberin merkezine birleştiren doğru parçalarını (yarı çapları) taşıyan ışınların oluşturduğu merkez açıların eş olduğunu" biliyorsunuz. Bu nedenle, elde ettiğimiz her ikizkenar üçgende, $s\ (O) = \frac{360°}{n}$ $\left(\text{şeklimizde, } \frac{360°}{6} = 60°\right)$ olacağından, tüm bu ikizkenar üçgenler eştir.

Tanım : Köşeleri bir çember üzerinde olup, tüm kenarları ve açıları eş olan bir çokgene, (kirişler çokgeni) düzgün çokgen denir.

Bu tür bir düzgün çokgenin alanı, eş üçgenlerin alanları toplamına eşittir. 9. Şekilde, $\overset{\frown}{M_1 O M_2}$ üçgeninin alanı;

$$A = \frac{1}{2}\ a.h$$

dir.

9. Şekilde, altı üçgen olduğu için;

$$A = \frac{1}{2}\ ah + \frac{1}{2}\ ah + \frac{1}{2}\ ah + \frac{1}{2}\ ah + \frac{1}{2}\ ah + \frac{1}{2}\ ah$$

$$= \frac{1}{2}\ h\ (a + a + a + a + a + a)\ dır.\ (Dağılma\ özeliği).$$

Öte yandan, (a + a + a + a + a + a) çokgenin "Ç" çevre ölçüsüne eşit olduğundan :

$$A = \frac{1}{2}\ hÇ$$

formülü elde edilir. Bu formüldeki Ç nin, düzgün çokgenin çevre uzunluğunun ölçüsü ve h nin, eş üçgenlerden birinin yüksekliği olduğuna dikkat ediniz.

Örnek :

Bir düzgün ongenin, bir kenarının uzunluğu a = 12 cm ve eş üçgenlerden birinin yüksekliği h = 18 cm dir. Bu düzgün ongenin alanı :

$$A = \frac{1}{2}\ .\ hÇ = \frac{1}{2}\ .\ 18.(10.12) = 9.120 = 1080\ cm^2\ dir.$$

6–1.8. Dairenin Alanı

Tanım : Çembersel bir bölge, çember ile çemberin içinin birleşimi olan bir kümedir.

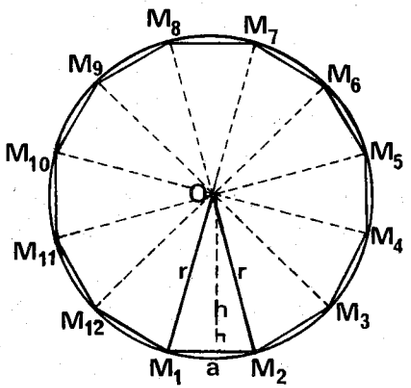
Genel olarak; "dörtgensel bölgenin alanı" yerine, nasıl "dörtgenin alanı" deyimini kullanmışsak, "çembersel bölgenin alanı" yerine de "bir dairenin alanı" diyeceğiz.

Şimdi, bir dairenin alanını veren formülü bulalım. Merkezi O ve yarıçapı r olan düzgün çokgenin alanını veren formülü;

$$A = \frac{1}{2} hÇ$$

olarak bulmuştuk. Bu dormülde, h düzgün çokgen içine çizilen eş üçgenlerden birinin yüksekliği, Ç ise, bu çokgenin çevre uzunluğunun ölçüsü idi.

Bu formülde, hepsi n ye bağlı üç çokluk vardır. Bunlar Ç, h ve A dır. Çemberin alanını bulmak için, n yeterince büyütüldüğünde, bunların hangi değerlere yaklaşacağını bulmak gerekir.



10. Şekil

1. Yukarıda, 10. Şekilde, açık otarak gördüğünüz gibi, çok kenarlı, içe çizilmiş düzgün bir çokgenin alanı; dairenin alanından biraz küçüktür. Çünkü, çemberin içinde ve aynı zamanda düzgün n kenarlı çokgenin alanı dışında olan, noktalar daima vardır. Fakat; n yeterince büyüdüğünde, dairenin alanı ile düzgün n çokgenin alanı arasındaki fark çok küçülür. çünkü; n çok büyükse, çokgen hemen hemen çemberin içini doldurur. Bu nedenle,

Düzgün n çokgenin alanı → dairenin alanı olur.

2. h yüksekliği, daima r den küçüktür. Çünkü; bir dik üçgende, dik kenarlar hipotenüsten küçüktür. Fakat; n çok büyüdüğünde, r ile

n arasındaki fark çok küçülür ve h yüksekliği r yarıçap uzunluğuna yaklaşır. O halde,

$$h \rightarrow r$$

olur.

3. Benzer biçimde düşünülürse, çokgenin çevre uzunluğu, gitgide dairenin çemberine yaklaşır. Bu nedenle;

$$Ç \rightarrow 2\,\pi\,r \text{ alınır.}$$

O zaman,

$$\frac{1}{2} hÇ \rightarrow \frac{1}{2} r\,(2\,\pi\,r)$$

olur.

1, 2, 3 de elde ettiğimiz sonuçları birleştirirsek; dairein yarıçapının ölçüsü r ve alanı A birim kare ise,

$$A = \frac{1}{2} r\,(2\,\pi\,r)$$

veya

$$A = \pi\,r^2$$

formülü elde edilir.

Örnek : :

Yarıçapı $r = 15$ cm olan dairenin alanı;

$$A = \pi\,r^2 = \pi\,15^2 = 225\,\pi \text{ cm}^2 \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda, ardışık kenarlarının uzunlukları verilen dikdörtgenlerin alanlarını bulunuz.

$a = 9\frac{5}{6}$ cm, $b = 3\frac{2}{5}$ cm; $a = \sqrt{12}$ dm, $b = \sqrt{3}$ dm

$a = 9$ dm, $b = 6$ dm; $a = 15\frac{3}{4}$ cm, $b = 8$ cm

2. Genişliği 7 dm ve köşegeninin uzunluğu 25 dm olan dikdörtgenin alanını bulunuz. (Cevap : 1,68 m^2)

3. Uzunluğu genişliğinden 2 m büyük ve çevresi 68 m olan dikdörtgen biçimindeki bir parselin alanı kaç m^2 dir. (Cevap : 288 m^2)

4. Aşağıda bir kenar uzunlukları verilen karelerin alanlarını bulunuz.

$a = 5\frac{1}{2}$ cm, $a = \sqrt{10}$ dm, $a = \sqrt{5}$ cm, $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ cm

5. Köşegenlerinin uzunlukları, aşağıda verilen karelerin alanlarını bulunuz.

$e = 6$ cm, $e = \sqrt{20}$ cm, $e = \sqrt{2}$ dm

6. Aşağıda, a tabanları ile h yükseklikleri verilen paralelkenarların alanını bulunuz.

$a = 1{,}4$ dm, $h = 0{,}8$ dm; $a = \sqrt{8}$ cm $h = \sqrt{2}$ cm

$a = 18$ cm, $h = 7$ cm; $a = 11\frac{4}{7}$ cm, $h = 5\frac{9}{4}$ cm

7. Aşağıda, birer kenar uzunlukları, yükseklikleri, köşegen uzunlukları verilen eşkenar dörtgenlerin alanlarını bulunuz.

$a = 12$ cm, $h = 7$ cm; $a = 5\sqrt{6}$ cm, $h = 2\sqrt{6}$ cm

$c = 10$ cm, $f = 6$ cm; $c = 8\sqrt{2}$ cm, $f = 6\sqrt{2}$ cm

8. Aşağıda, a tabanları ile h yükseklikleri verilen üçgenlerin alanlarını bulunuz.

$a = 2{,}4$ dm, $h = 1{,}5$ dm; $a = 19$ cm, $h = 10$ cm

$a = 16\frac{4}{5}$ cm, $h = 7$ cm; $a = \sqrt{18}$ dm, $h = 3\sqrt{2}$ dm

$a = 5\sqrt{12}$ cm, $h = \sqrt{12}$ cm; $a = \sqrt{50}$ cm, $h = 3\sqrt{8}$ cm

9. Bir $\widehat{ABC}$ dik üçgeninde, s (A) = 90°, a = 10 cm, c = 6 cm dir.

a) Bu dik üçgenin, dik kenarları ve hipotenüsü üzerine eşkenar üçgenler çiziniz.

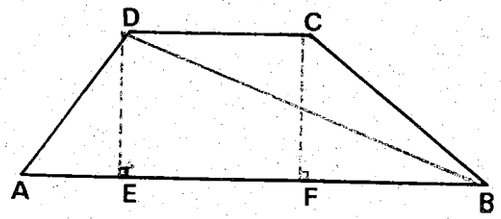
b) (a) şıkkında çizdiğiniz eşkenar üçgenlerin alanlarını bulunuz.

c) Dik kenarlar üzerine çizilen eşkenar üçgenlerin alanları toplamı, hipotenüs üzerine çizilen eşkenar üçgenin alanına eşit midir?

10. Bir kenarının uzunluğu a = 20 cm olan eşkenar üçgenin, alanını bulunuz. (Cevap : 100 $\sqrt{3}$ cm^2.)

11. Bir kenarının uzunluğu a = 12 cm olan eşkenar üçgenin alanını bulunuz. (Cevap : 36 $\sqrt{3}$ cm^2.)

12. Aşağıda verilen şartlara göre 11. şekildeki ABCD yamuğunun alanını bulunuz.



11. Şekil

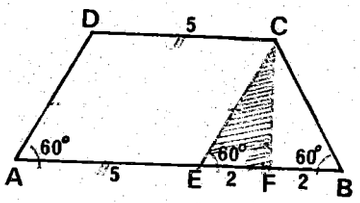
a) | AB | = 14 cm, | DC | = 8 cm, | DE | = 6 cm

b) | AE | = 6 cm, | FB | = 10 cm, | CD | = 12 cm, | DE | = 8 cm

c) | AB | = 36 cm, | DE | = 10 cm, | AE | = 6 cm, | EF | = | FB |

(Cevap : Sıra ile 66 cm^2, 160 cm^2, 205 cm^2.)

13. Bir ABCD ikizkenar ([AB] // [CD]) yamukta, | AB | = 9 cm, | CD | = 5 cm ve s (A) = 60° dir. Bu yamuğun alanını bulunuz.
(Cevap : 14 $\sqrt{3}$ cm^2).



12. Şekil

Açıklama :

12. Şekildeki, ABCD ikizkenar yamuğunda, yanal kenarların "[AD] , [BC]" ve taban açılarının $s(\widehat{A}) = s(\widehat{B}) = 60°$ ölçüleri eşittir. [DA] // [CE] çizilirse, $s(\widehat{DAB}) = s(\widehat{CEB}) = 60°$ (yöndeş) ve AECD paralelkenar olur. Bu durumda,

$$|CD| = |AE| = 5 \text{ cm ve}$$
$$|DA| = |CE| = |CB|$$

olur.

Öte yandan taban açıları 60° ar derece olan $\widehat{CEB}$ ikizkenar üç geni, aynı zamanda eşkenar olup, $|CE| = |EB| = |BC| = 4$ cm ve $|EF| = \frac{4}{2} = 2$ cm olur. Şimdi, yamuğun yüksekliğini bulabiliriz.

Şöyle ki :

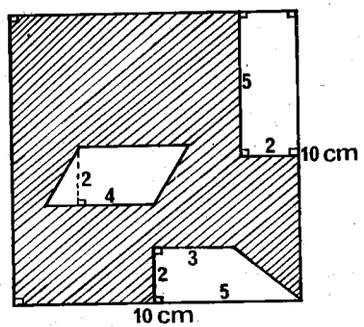
I. Yol : $\widehat{CEF}$ dik üçgeninde, Pisagor bağıntısına göre,

$$|EF|^2 + h^2 = |CE|^2 \Rightarrow h^2 = |CE|^2 - |EF|^2$$
$$\Rightarrow h^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$
$$\Rightarrow h = \sqrt{12} = \sqrt{4.3} = 2\sqrt{3} \text{ cm dir.}$$

II. Yol : $\widehat{CEF}$ dik üçgeninde,

$$\tan 60° = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2.\tan 60°$$
$$\Leftrightarrow h = 2 . \sqrt{3} \text{ cm dir.}$$

14. Bir yamuğun alanı 240 cm² dir. Taban uzunlukları 26 cm ve 14 cm olduğuna göre, yüksekliğini bulunuz. (Cevap : 12 cm.)



13. Şekil

15. 13. Şekilde taranmış bölgenin alanını bulunuz. (Cevap : 74 cm²)

16. Merkezleri O ve yarıçapları $r_1 = 30$ cm, $r_2 = 20$ cm olan iki daire arasında kalan daire halkasının alanını bulunuz. ($\pi \approx 3{,}14$ alınız). (Cevap : 1570 cm²).

17. İki daireden, büyüğünün yarıçap uzunluğu, küçüğünün yarıçap uzunluğunun dört katıdır. Küçük dairenin alanının, büyük dairenin alanına oranını bulunuz. $\left(\text{Cevap : } \frac{1}{16}\right)$.

18. Merkezleri O ve yarıçapları $r_1 = 25$ cm, $r_2 = 15$ cm olan iki daire arasında kalan daire halkasının alanını bulunuz.

($\pi \approx 3{,}14$ için, cevap : 1256 cm²).

19. İki daireden büyüğünün yarıçapı, küçüğünün yarıçapının iki katıdır. Küçük dairenin alanının, büyük dairenin alanına oranını bulunuz. $\left(\text{Cevap : } \frac{1}{4}\right)$.

20. Bir çemberin çevresinin ölçüsü ile bir karenin çevresinin, ölçüsü eşit ve 125,6 cm dir. Hangisinin alanı daha büyüktür? Ne kadar?

($\pi \approx 3{,}14$. alınız. Cevap : Fark 270,04 cm²).

21. Bir kenarı 20 cm olan ABCD karesinin, köşelerinden geçen çember ile kenarlarına teğet olan çemberler çiziliyor.

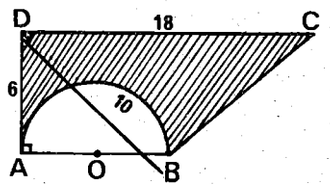
a) Bu iki çember arasında kalan alanı bulunuz.

b) Köşelerden geçen çember ile kare arasında kalan alanı bulunuz.

($\pi \approx 3{,}14$ alınız. Cevap : (a) için, 314 cm², (b) için, 228 cm²).

22. 14. Şekilde gördüğünüz ABCD dik yamuğundaki, taralı bölgenin alanını bulunuz

($\pi \approx 3{,}14$ alınız. cevap : 5 , 88 cm²).



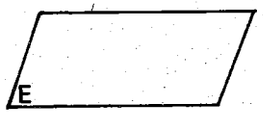
14. Şekil

6–2. DÜZLEMLER VE DOĞRULAR

6–2.1. Düzlem :

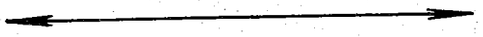
Düzlem ve doğru terimlerini tanımsız olarak alacağız. Fakat, bunlardan ne anladığımızı açıklayacağız. Bir camın yüzü, bir masanın üstü, düzgün bir duvarın yüzü gibi tamamen düz ve aynı zamanda, her yönde sonsuz uzanan ve noktalar kümesinden oluşan bir yüzey düşünürseniz, düzlem için, iyi bir fikre sahip olabilirsiniz, Ancak, bu açıklama bir tanım değildir.

15. Şekil, bir düzlemin kâğıt ya da yazı tahtası üzerindeki gösterişli biçimi olup, köşesine konan bir harf ile adlandırılır. (E) düzlemi gibi.



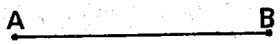
15. Şekil

6–2.2. Doğru



16. Şekil

Doğru deyince, 16. Şekilde gördüğünüz gibi, her iki yönde sonsuz uzanan bir noktalar kümesi aklınıza gelecektir.



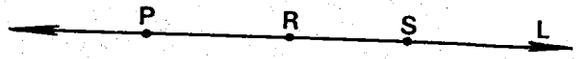
Yukarıda gördüğünüz şeklin A ve B noktaları ile bunlar arasında bulunan tüm noktaların birleşim kümesine, AB doğru parçası dediğimizi ve [AB] sembolü ile gösterdiğimizi biliyorsunuz. A ve B noktalarına, doğru parçasının uç noktaları denir. Doğru parçası için, iki ucundan iyice gerilmiş sicim şeklini de düşünebiliriz.

Sorular :

1. Bir L doğrusu üzerinde, sıra ile P, R, S noktaları alınıyor. Aşağıdaki birleşim ve kesişim kümelerini bulunuz.

a) $[PR] \cup [RS] = ?$ b) $[PR] \cup \{R\} = ?$ c) $[PR] \cup [PS] = ?$
d) $[PR] \cap [RS] = ?$ e) $[PR] \cap [PS] = ?$ f) $[PS] \cap [RS] = ?$

Açıklama :



17. Şekil

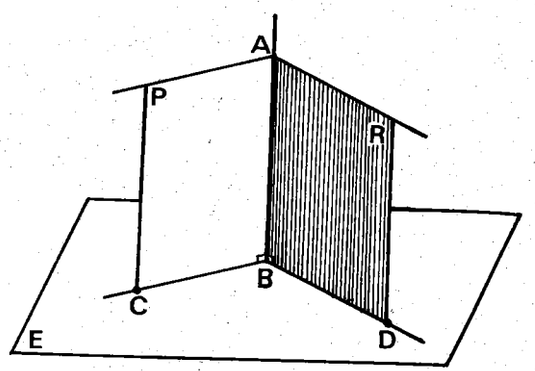
a) $[PR] \cup [RS] = [PS]$ d) $[PR] \cap [RS] = \{R\}$
b) $[PR] \cup \{R\} = [PR]$ e) $[PR] \cap [PS] = [RS]$

dir.

2. Bir L doğrusu üzerinde, sıra ile A, B, C, D noktaları alınıyor. Aşağıdaki birleşim ve kesişim kümelerini bulunuz.

a) $[AB] \cup [CD] = ?$ b) $[AC] \cup \{C\} = ?$ c) $[BD] \cup [CD] = ?$
d) $[AC] \cap [BC] = ?$ e) $[AC] \cap [BD] = ?$ f) $[AB] \cap [CD] = ?$

3–2.3 Bir Düzleme Dik Doğru



18. Şekil

18. Şekilde gördüğünüz gibi, sınıfınızın duvarlarının yüzeylerinden geçen P ve R düzlemlerinin AB arakesiti; E taban düzlemiyle

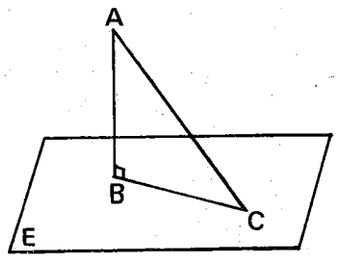
P ve R düzlemlerinin arakesitleri olan BC ve CD doğrularına diktir. kısaca,

$$[AB] \perp [BC] \text{ ve } [AB] \perp [BD]$$

dir.

Özelik : Bir doğru, bir düzlemin kesişen iki doğrusuna dik ise, düzleme de dik olur.

6–2.4 Bir Noktanın Düzleme Uzaklığı



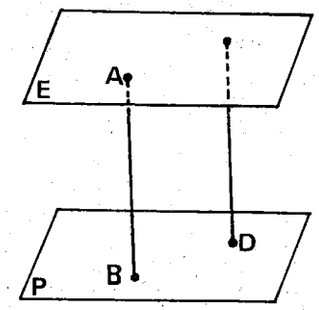
19. Şekil

19. Şekilde gördüğünüz E düzlemi ve dışında bir nokta A olsun. A noktasında, E düzlemine [AB] dikmesini çizelim. E içindeki bir C noktasını, A ile birleştirdiğimizde; meydana gelen $\widehat{ABC}$ dik, üçgen olur mu? Cevabımız, evet olacaktır. Çünkü; [AB] nın E düzlemine dik olması için, [AB] nın, E düzleminin B den geçen en az iki doğrusuna dik olması gerekir. Öyleyse, $[AB] \perp [BC]$ olur.

Böylece, $\widehat{ABC}$ dik üçgen ve $|AB| < |AC|$ olur mu? (Bir dik üçgende, dik kenarlar ile hipotenüs arasındaki bağıntıyı hatırlayınız).

Özelik : Bir E düzleminin dışında alınan bir A noktasını, E ye birleştiren en kısa doğru parçası, E ye dik olan doğru parçasıdır. Bu en kısa uzaklığa, A nın E ye olan uzaklığı denir.

6–2.5 Paralel İki Düzlem Arasındaki Uzaklık



20. Şekil

20. Şekilde gördüğünüz E ve F düzlemlerinin ortak noktaları yoktur. Yani, $E \cap F = \emptyset$ dir. Böyle düzlemlere, paralel düzlemler denir ve $E \parallel P$ biçiminde gösterilir. Bu tür iki düzlemi, sınıfınızın tavanı ile tabanının belirttiği düzlemler biçiminde düşünebilirsiniz. Sınıfınızda, başka paralel düzlemler görüyor musunuz?

Sınıfınızın tavanında, değişik yerlerde birçok çivinin bulunduğunu ve bunların herbirine, uçlarına ağırlık asılmış sicimlerin, tavanın en yakın noktasından bağlanıp, serbest bırakıldığını varsayalım. Bu sisicimlerin, uçlarının tabana değme durumunda gergin olmasını sağlayınız. Bu sicimlerin tavan ile taban arasındaki uzunlukları birbirine eşit midir?

Özelik : İki düzlem birbirine paralel ise, birindeki noktaların, diğer düzleme olan uzaklıkları (dikmelerin uzunlukları) birbirine eşittir.

Bu özelikteki sabit uzaklığa, paralel iki düzlem arasındaki **uzaklık** denir. (Yukarıdaki 20. şekilde, $|AB| = |CD|$ olup; $E \parallel F$ düzlemleri arasındaki uzaklıktır).

ALIŞTIRMALAR

1. Sınıfınızda bulduğunuz paralel düzlem çiftleri arasındaki uzaklıkları, en kısa yoldan bulunuz.

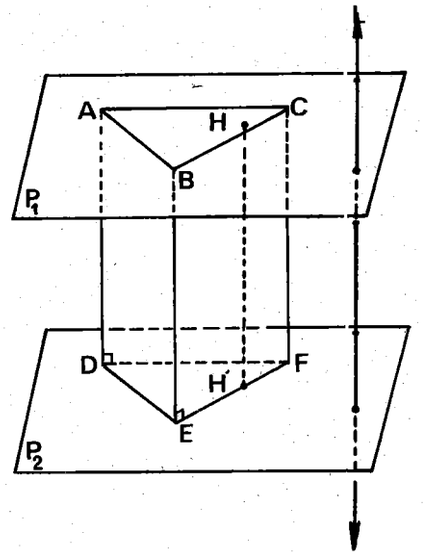
2. Paralel iki düzleme dik olan doğrular, birbirleri ile ne durumdadır? Etrafınızdaki cisimler ve bildiğiniz şekiller üzerinde, bu tür doğrular bulunuz.

3. Paralel E ve F düzlemleri, bir M düzlemini kesiyor. $E \cap M = L_1$ ve $F \cap M = L_2$ ise, $L_1 \,//\, L_2$ olduğunu gösteriniz.

Yol gösterme: L_1, L_2 nin, M düzlemi içinde olduğunu ve $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ olacağını düşününüz.

6–3. PRİZMALAR

6–3.1. Dik Prizmalar



21. Şekil

21. Şekilde gördüğünüz P_1 ve P_2 paralel iki düzlem, bu düzlemleri dik olarak kesen bir doğru da L olsun. P_1 düzlemi üzerindeki bir A bölgesinin her H noktasından L doğrusuna çizilen paralel doğru P_2 yi H′ de kessin. Tüm [HH′] doğru parçalarının birleşiminin oluşturduğu katı cisme **prizma,** çokgensel bölgelerin oluşturduğu doğru parçalarına **yan ayrıtlar**, P_1 ve P_2 düzlemlerindeki çokgensel bölgelere de üst ve alt tabanlar denir.

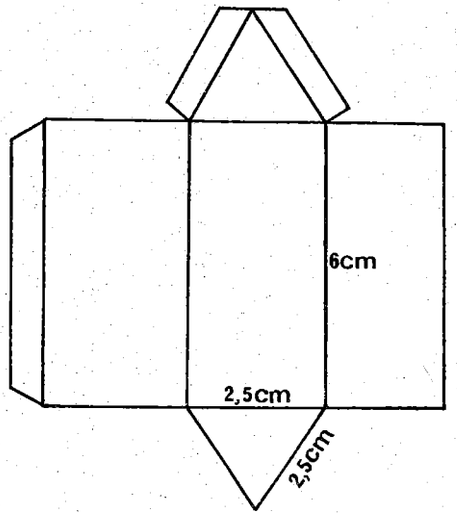
Örneğin, 21. şekilde P_1 düzlemine ait $\widehat{ABC}$ üçgensel bölgesinin her H noktasından L doğrusuna paralel çizilerek elde edilen [HH′] doğru parçalarının oluşturduğu (ABCDEF) katı cismi, bir **dik prizmadır.** [AD], [BE], [CF] yan ayrıtlar; P_2 düzleminde oluşan $\widehat{DEF}$ üçgensel

bölgesi **alt taban,** P_1 düzleminde oluşan $\widehat{ABC}$ üçgensel bölgesi **Üst taban,** ADEB de bir dikdörtgensel bölgedir.

Bir dik prizmada, yanal kenarların uzunlukları, bu dik prizmanın yüksekliğidir.

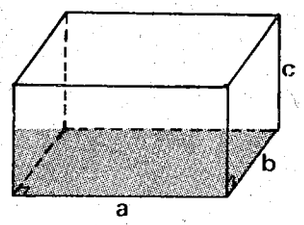
Bir dik prizma, taban çokgenlerine göre adlandırılır. Üçgen dik prizma, dik üçgen dik prizma, dikdörtgen dik prizma, kare dik prizma, altıgen dik prizma gibi.

EŞKENAR ÜÇGEN DİK PRİZMANIN AÇIK ŞEKLİ



22. Şekil

6–3.2. Dikdörtgenler Prizması



23. Şekil

Tabanları dikdörtgen olan dik prizmaya, **dikdörtgenler prizması** denir. Kibrit kutusu, dikdörtgenler prizması için, iyi bir örnektir. 23. Şekilde, böyle bir prizma görmektesiniz.

Bir dikdörtgenler prizmasının bir köşesinde birleşen üç kenarının (ayrıntının) uzunluklarına, bu dikdörtgenler prizmasının **boyutları** (23. Şekilde a, b, c) denir.

Üç boyutu a, b, c, olan dikdörtgenler prizmasının yüzey alanının ölçüsünü A ve hanım ölçüsünü H ile gösterelim. Aşağıdaki formülleri hemen hatırlayacaksınız.

$$A = 2\ (ab + ac + bc)$$

$$H = a.\ b.\ c \text{ veya}$$

$$G = a\ .\ b \text{ ve } c = h \text{ dersek,}$$

$$H = G.h$$

formülünü elde ederiz.

Burada G, bir tabanın alan ölçüsü, h de bu tabana ait yüksekliğin ölçüsüdür. Bir dikdörtgenler prizmasında, her yüzün dir bikdörtgen ve ve herhangi paralel bir çift yüzün tabanlar olarak alınabileceğini unutmayınız. Öyleyse, yukarıdaki hacim formülünün sözcüklerle ifadesi:

Bir dikdörtgenler prizmasının hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.

biçiminde olur.

Örnek :

Ayrıtları a = 8 cm, b = 6 cm, c = 4 cm olan dikdörtgenler prizmasının alan ve hacmini bulalım.

$A = 2\ (ab + ac + bc)$

$A = 2\ (8.6 + 8.4 + 6.4)$

$A = 2\ (48 + 32 + 24)$

$A = 2.104$

$A = 208\ cm^2$ dir.

$H = a.\ b.\ c$

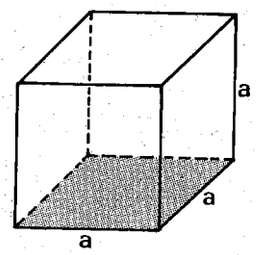
$H = (8.6).4$

$H = 48.4$

$H = 192\ cm^3$

tür.

6–3.3 K ü p



24. Şekil

Bir küp, bütün kenarları eş olan özel bir dikdörtgenler prizmasıdır. 24. Şekil, bir kenarı a uzunluğunda olan bir küptür.

Küp, bir dikdörtgenler prizması olduğu için, yüzey alanı ve hacmi dikdörtgenler prizmasında olduğu gibi hesaplanır.

$A = 2\ (ab + ac + bc)$

$A = 2\ (a.a + a.a + a.a)$

$A = 2\ (3a^2)$

$A = 6a^2$ dir.

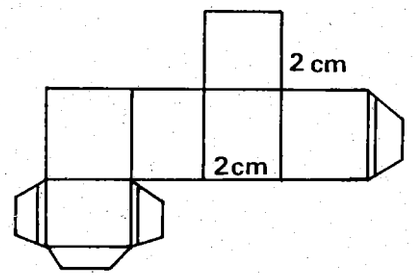
$H = a.b.c$

$H = a.a.a$

$H = a^2.a$

$H = a^3$ tür.

KÜPÜN AÇIK ŞEKLİ



25. Şekil

1′ Örnek :

Bir kenarının uzunluğu a = 6 cm olan bir küpün, alanı ve hacmini bulalım.

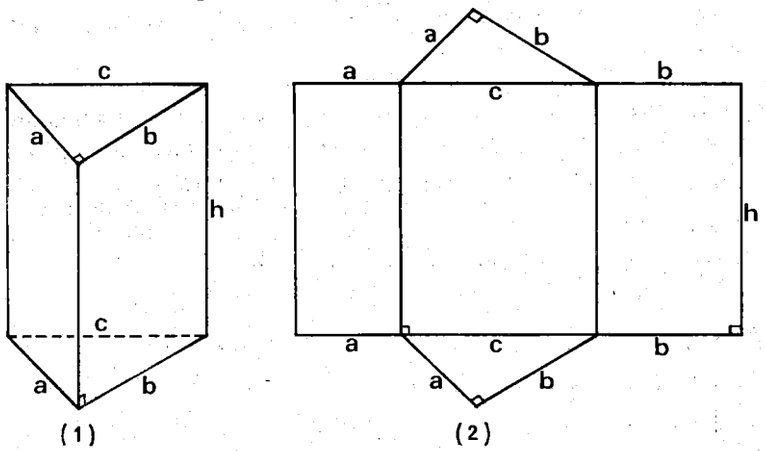
$A = 6.a^2 = 6.6^2$ | $H = a^3 = 6^3$

$A = 6.36 = 216\ cm^2$ | $H = 216\ cm^3$ tür.

2. Örnek :

a = 5 için, $A = 150\ cm^2$; $H = 125\ cm^3$ tür.

6–3.4. Dik Üçgen Dik Prizma



26. Şekil

26. Şekilde (1), tabanı dik üçgen olan bir dik prizmadır. Bu dik prizmanın taban kenarlarının uzunlukları a, b, c, ve yüksekliği h olsun. Bu dik prizmanın açılımını 26. Şekil (2) de görmektesiniz. Bu açılıma göre, yanal yüzün alanı bir dikdörtgendir. Bu dikdörtgenin uzunluğu (a + b + c) olup, dik prizmanın taban çevresinin uzunluğuna eşittir. Dikdörtgenin yüksekliği de, dik prizmanın h yüksekliğine eşittir.

Öyleyse, bu dik prizmanın yanal yüz alanı;

$$Y = (a + b + c).h$$

dir. Bu dik prizmanın tüm yüzey alanı, yanal yüz alanına taban alanlarının katılmasiyle elde edilir. Bu prizmanın tabanları eş iki dik üçgen ve bu dik üçgenlerin dik kenar uzunlukları a,b olduğundan, bu dik prizmanın tüm alanı;

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\ ab\right) + (a + b + c)\ h$$

$$A = ab + (a + b + c)\ h$$

olur. Üçgensel tabanın çevre uzunluğunu Ç ile gösterirsek;

$$A = ab + Çh$$

formülü elde edilir. Herhangi bir prizmanın hacmi için, aşağıdaki özeliği kabul edeceğiz.

Özelik : Herhangi bir prizmanın hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.

Bu özeliğe göre, 26. Şekildeki dik prizmanın hacim formülü;

$$H = \frac{1}{2}\ ab.h \quad \text{veya} \quad H = G.h$$

olur.

Burada G, tabanın alan ölçüsüdür.

Örnek :

Tabanın dik kenarlarının uzunlukları a = 6 cm, b = 8 cm ve yüksekliği 12 cm olan, dik üçgen dik prizmanın tüm yüz alanını ve hacmini bulalım.

Çözüm :

Taban dik üçgenlerinin c hipotenüsünün uzunluğu,

$$c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 64 = 100$$

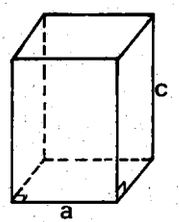
$$c = \sqrt{100} = 10\ cm\ dir.$$

$$A = ab + (a + b + c)\ h = 6.8 + (6 + 8 + 10)\ 12$$

$$A = 48 + (25\ .\ 12) = 48 + 288 = 336\ cm^2\ dir.$$

$$H = \frac{1}{2}\ ab.\ h = \frac{1}{2}.(6.8)\ .\ 12 = 48\ .\ 6 = 288\ cm^3\ tür.$$

6–3.5. Kare Dik Prizma



27. Şekil

Tabanları kare olan dik prizmaya kare dik prizma denir. 27. Şekilde, böyle bir prizma görüyorsunuz. Kare dik prizmanın, tabanları bir düzgün çokgen (karenin ve düzgün çokgenlerin tanımlarını hatırlayınız) olduğundan, düzgün bir prizmadır. Kare dik prizma gibi, tabanları düzgün çokgen olan dik prizmalara düzgün **prizma** denir. Eşkenar üçgen dik prizma, düzgün beşgen ve düzgün altıgen dik prizma, düzgün prizmalar için, birer örnektir.

Taban ayrıtı a, yanal ayrıtı c, yüzey ölçüsü A ve hacim ölçüsü H ise;

$$A = 2a^2 + 4ac = 2a\ (a + 2c),$$

$$H = a^2c$$

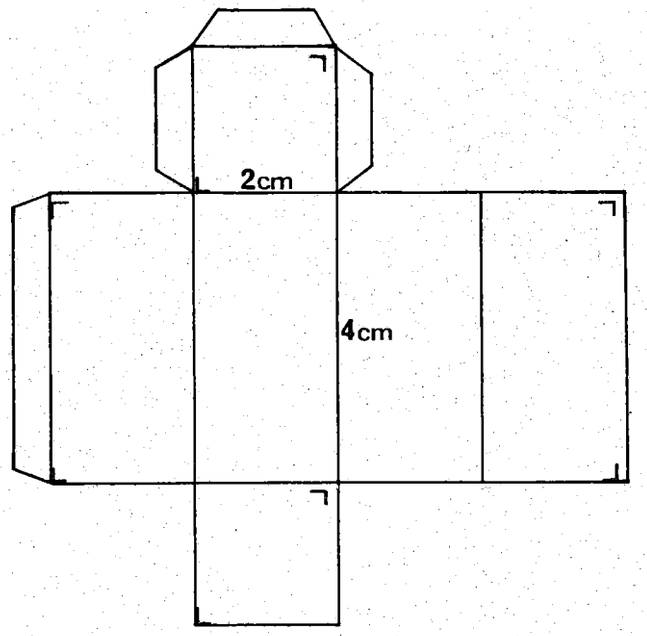
olur.

Örnek :

Bir taban ayrıtı a = 5 cm, yanal ayrıtı c = 8 cm olan kare dik prizmanın alan ve hacmini bulalım.

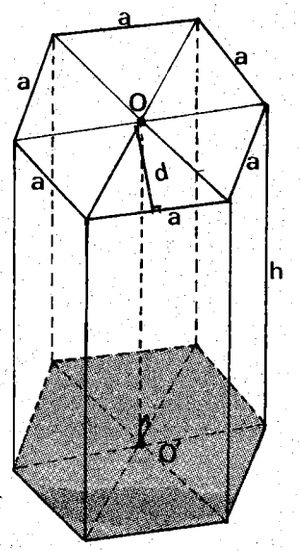
$A = 2a\ (a + 2c)$	$H = a^2c$
$A = 2.5\ .\ (5 + 2.8)$	$H = 5^2\ .\ 8$
$A = 10.21$	$H = 25.8$
$A = 210\ cm^2$ dir.	$H = 200\ cm^3$ tür.

KARE DİK PRİZMANIN AÇIK ŞEKLİ



28. Şekil

6–3.6. Düzgün Altıgen Dik Prizma



29. Şekil

Bu prizmanın tabanı, herhangi bir altıgen olabilirse de, biz burada yalnız düzgün altıgen tabanlı dik prizmayı ele alacağız. 29. Şekil düzgün altıgen dik prizma için, bir örnektir. Bu şekli iyice inceleyiniz. Taban kenarlarının birinin uzunluk ölçüsü, a bu kenarların birine ait yükseklik ölçüsü d ve prizmanın yüksekliğinin ölçüsü de, h olsun. Alan ve hacim formülleri şunlardır.

$$A = 2 \cdot 6\left(\frac{1}{2}\ ad\right) + 6\ ah$$

$$A = 6\ ad + 6\ ah$$

$$A = Çd + Çh$$

olur.

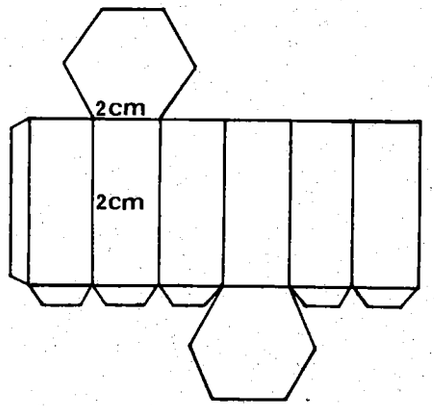
$$H = \frac{1}{2}\ Ç\ dh$$

veya

$$H = G.h$$

olur.

DÜZGÜN ALTIGEN DİK PRİZMANIN AÇIK ŞEKLİ

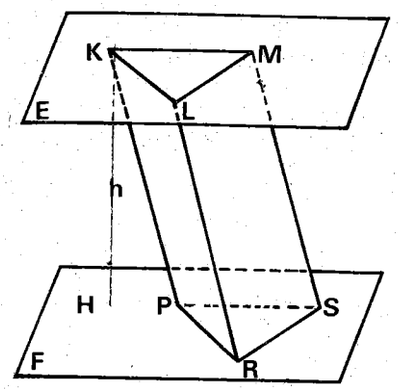


30. Şekil

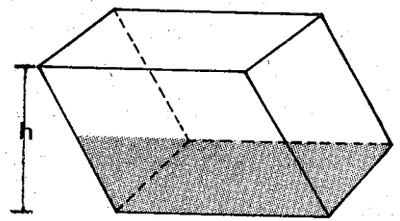
Bu formülde Ç, tabandaki altıgenin çevre ölçüsünü; G ise, taban alanının ölçüsünü göstermektedir.

6–3.7. Eğik Prizmalar

Eğik prizmaların tanıtımı, kesim 6–3.1. de gördüğümüz dik prizmalardan herhangi birine çok benzer. Yan ayrıkları taban düzlemlerine dik olmayan prizmalara **eğik prizma** denir.



31. Şekil



32. Şekil

Eğik bir prizma, 31. Şekilde gördüğünüz gibi gösterilir. Şekilde, E // F, $\overset{\frown}{KLM} \cong \overset{\frown}{PRS}$ ve KLMPRS eğik prizmadır. Bu prizmanın yüksekliği [KH] ya da h dir.

6–3.8. Paralelyüz

Bütün yüzleri paralelkenar olan eğik prizmaya **paralelyüz** denir. 32. şekil, bir paralelyüzü göstermektedir. Paralelyüzün taban alanı G ve taban düzlemleri arasındaki yüksekliği h ise, hacim formülü;

$$H = G \cdot h$$

dir.

ALIŞTIRMALAR

1. Boyutları aşağıda verilen dikdörtgenler prizmalarının yüz alanları ve hacimlerini bulunuz.

a) $a = 4{,}5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 6$ cm

b) $a = 12\frac{2}{5}$ cm $b = 7\frac{1}{2}$ cm, $c = 25$ cm

2. Dikdörtgenler prizması biçimindeki bir su teknesinin iç boyutlarının; uzunluğu 2 m, genişliği 1,5 m yüksekliği 0,6 m dir. Bu tekne kaç litre su alır? (Cevap : 1800 litre).

3. Dikdörtgenler prizması biçimindeki bir mermer sütunun boyutları 4 dm, 3 dm, 35 dm dir. Bu mermer sütunun :

a) Bütün yüz alanı kaç m^2 dir?

b) Hacmi kaç m^3 tür.

c) 1 dm^3 mermer 2,5 kğ olduğuna göre, ağırlığı kaç tondur?

(Cevap : 5.14 m^2; 0,42 m^3; 1.05 ton).

4. 245 hl su ile dolan dikdörtgenler prizması biçimindeki bir havuzun; uzunluğu 35 dm, genişliği 28 dm dir. Bu havuzun derinliği kaç m dir? (Cevap : 2,5 m).

5. Dik prizma biçimindeki bir su havuzunun tabanı, bir kenarı 3 m olan bir karedir. Hacmi 432 hektolitre olan bu havuzun, derinliği kaç metredir? (Cevap : 4,8 m).

6. Dikdörtgenler prizması biçimindeki bir odanın hacmi 154 m^3 tür. Yüksekliği 3,5 m olan bu odanın taban alanı kaç m^2 dir? (Cevap : 44 m^2).

7. Elinizde bulunan kartondan, bir ayrıtının uzunluğu 12 cm olan bir küp yapsanız ve küpün bir yüzünün yarısı açık kalsa (kartonunuz küpü tamamlayamadan tükense), kartonunuz kaç cm^2 olur?

(Cevap : 792 cm^2).

8. Kare tabanlı bir dik prizmanın, tabanının, bir kenarı $a = 6$ cm ve yüksekliği $h = 12$ cm dir. Bu dik prizmanın yanal yüz alanını, bütün yüz alanını ve hacmini bulunuz.

(Cevap : 288 cm^2, 360 cm^2, 432 cm^3).

9. Bir ayrıtının uzunluğu 2,4 dm olan bir küpün hacmi; uzunluğu 1,8 dm, genişliği 1,6 dm olan bir dikdörtgenler prizmasının hacmine eşittir. Bu dikdörtgenler prizmasının yüksekliği kaç dm dir?

(Cevap : 4,8 dm).

10. Dikdörtgenler prizması biçimindeki bir havuzun $\frac{2}{3}$ ünde 64 m^3 su var. Derinliği 2,4 m olan bu havuzun taban alanı kaç m^2 dir?

(Cevap : 40 m^2).

11. Kartondan, bir ayrıtı $a = 16$ cm olan bir küp yapmak isteseniz.

a) Kaç dm^2 karton gerekir? (Cevap : 15, 36 dm^2).

b) Bu küpün hacmi kaç dm^3 tür? (Cevap : 4,096) dm^3.

12. Kapağı olmayan, küp biçimindeki kartondan bir kutunun, bir ayrıtının uzunluğu $a = 28$ cm dir.

Bu kutuyu oluşturan kartonun alanı kaç m^2 dir?

(Cevap : 0,392 m^2).

13. Bir benzin istasyonunda, bir ayrıtının uzunluğu $a = 3{,}6$ m olan küp biçimindeki bir benzin deposu var. Bu deponun $\frac{3}{4}$ ü benzin ile dolu olduğuna göre, depoda kaç hektolitre benzin vardır?

(Cevap : 349, 92 hl).

14. Tabanının bir kenarı $a = 10$ cm ve yüksekliği $h = 25$ cm olan eşkenar üçgen dik prizmanın :

a) Yanal yüz alanı kaç dm^2 dir? (Cevap : 7,5 dm^2).

b) Bütün yüz alanı kaç cm dir? (Cevap : $750 + 50\sqrt{3}$ cm^2).

c) Hacmi kaç cm^3 tür? (Cevap : $625\sqrt{3}$ cm^3).

15. Yüksekliği 4 dm olan bir dik üçgen dik prizmanın, taban dik kenarlarından birinin uzunluğu 1,5 dm, hipotenüsünün uzunluğu 2,5 dm dir. Bu dik prizmanın tüm yüz alanı ve hacmini bulunuz.

(Cevap : 27 dm^2; 6 dm^3).

16. Tabanının bir kenarı 8 cm ve yüksekliği 15 cm olan eşkenar üçgen dik prizmanın, tüm yüz alanı ve hacmini bulunuz.

(Cevap : $(32\sqrt{3}+360)$ cm²; $240\sqrt{3}$ cm3).

17. Eş kenarlarının uzunlukları toplamı 26 cm ve üçüncü kenarının uzunluğu 10 cm olan, ikizkenar üçgen dik prizmanın yüksekliği 20 cm dir. Bu prizmanın, tüm yüz alanını ve hacmini bulunuz.

(Cevap : 840 cm²; 1200 cm³).

18. Yüksekliği 4 dm olan bir üçgen dik prizmanın, taban kenarlarının uzunlukları 1,5 dm, 2 dm ve 2,5 dm dir.

a) Bu dik prizmanın yanal yüz alanını bulunuz. (Cevap : 24 dm²),

b) Bu dik prizmanın bütün yüz alanını bulunuz. (Cevap : 27 dm²).

c) Bu dik prizmanın hacmini bulunuz. (Cevap : 6 dm³).

Yol gösterme : Önce, bu prizmanın tabanının bir dik üçgen oldoğunu görünüz.

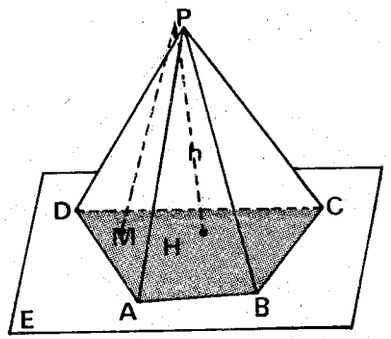
19. Düzgün altıgen tabanlı dik prizmanın, tabanının köşelerinden geçen çemberin yarıçapı 6 cm dir. Bu dik prizmanın yüksekliği, taban köşelerinden geçen çemberin çapına eşittir.

a) Bu dik prizmanın bütün alanını bulunuz.

(Cevap : $(108\sqrt{3}+432)$ cm²).

b) Bu dik prizmanın hacmini bulunuz. (Cevap : $648\sqrt{3}$ cm³).

6–4. PİRAMİTLER



33. Şekil

33. Şekilde gördüğünüz gibi, bir E düzlemine ait bir çokgensel bölge ABCD ve E düzleminin dışında alınan sabit bir noktada P olsun. ABCD bölgesinin her M noktası için, bir [MP] sı vardır. Bu doğru parçalarının birleşimi olan kümeye (katı cisme) ABCD tabanlı, P tepeli **piramit** denir. ABCD kapalı çokgensel bölgeye piramidin tabanı; $\overset{\triangle}{PAB}$, $\overset{\triangle}{PBC}$, $\overset{\triangle}{PCD}$, $\overset{\triangle}{PDA}$ kapalı üçgensel bölgelere, **yanal yüzler**; P noktasına tepe ve tepede birleşen [PA], [PB], [PC], [PD] doğru parçalarına, **yanal kenarlar** denir.

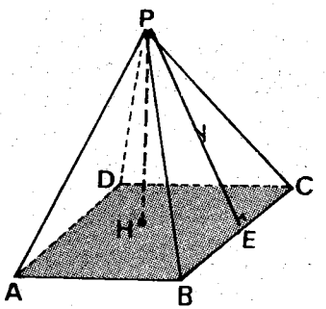
Piramidin, tepesi ile taban düzlemi arasında kalan uzaklığa, piramidin **yüksekliği** (şekilde $|PH| = h$) ve yüksekliğin uzunluğuna, piramidin boyu denir. Bir piramitte, yükseklik ayağının yerini, tam olarak her zaman bulmak kolay olmaz. Yükseklik, bazen yanal kenarlardan biriyle çıkışabilir. Bu durumda yüksekliğin ayağı, tabanın bir köşesiyle üst üste gelmiş olur. Bazen de, tabanın dışında bulunabilir.

Piramitler, taban çokgenlerine göre adlandırılırlar. Örneğin; üçgen piramit, dörtgen pramit, kare piramit, beşgen piramit, altıgen piramit gibi.

6–4.1. Düzgün Piramit

Tabanı düzgün bir çokgen ve yükseklik ayağı tabanın merkezinde olan piramide, **düzgün piramit** denir. Düzgün bir piramidin, yanal ayrıtları eşit ve yanal yüzleri eş ikizkenar üçgenlerdir.

6–4.2. Düzgün Piramidin Alanı



34. Şekil

34. Şekil, kare tabanlı düzgün bir piramittir. Bir düzgün piramitte, bir yanal yüz yüksekliğine (şekilde, $|PE| = y$) piramidin, **yanal yüz yüksekliği** denir.

$\overset{\frown}{PBC}$ üçgensel bölgesinin alanı, $\frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot y$ dir. Bu piramidin dört eş yanal yüzü vardır. Öyleyse, yanal yüzün alanı;

$$Y = 4 \cdot \frac{1}{2} ay = \frac{1}{2} \cdot (4a)\ y \text{ ve}$$

$4a = Ç$ (taban çevresi) yazarsak,

$$Y = \frac{1}{2} Çy$$

formülünü elde ederiz.

Düzgün piramidin taban alanı G ise, tüm alanı;

$$A = G + Y$$

olur.

6–4.3. Piramidin Hacmi

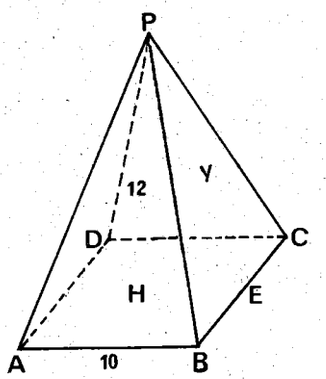
Özelik : Bir piramidin hacmi, tabanları eş ve yükseklikleri aynı olan bir prizmanın, hacminin üçtebirine eşittir.

Bu özeliğe göre, taban alanı G ve yüksekliği h olan bir piramidin hacim formülü;

$$H = \frac{1}{3} Gh$$

dir.

Örnek :



35. Şekil

35. Şekilde gördüğünüz gibi, ABCD karesinin merkezi H olduğundan,

$$|HE| = \frac{|AB|}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm dir.}$$

$|PH| = h = 12$ cm (verildi).

Buradan, $\overset{\frown}{PHE}$ dik üçgeninde, Pisagor bağıntısına göre :

$$|PE|^2 = |PH|^2 + |HE|^2 = 12^2 + 5^2$$
$$= 144 + 25 = 169$$
$$|PE| = y = \sqrt{169} = 13 \text{ cm dir.}$$

Yanal yüz alanı :

$$Y = \frac{1}{2} \cdot Ç \cdot y = \frac{1}{2} \cdot (4.10) \cdot 13 = 260 \text{ cm}^2$$

Taban alanı :

$$G = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$$

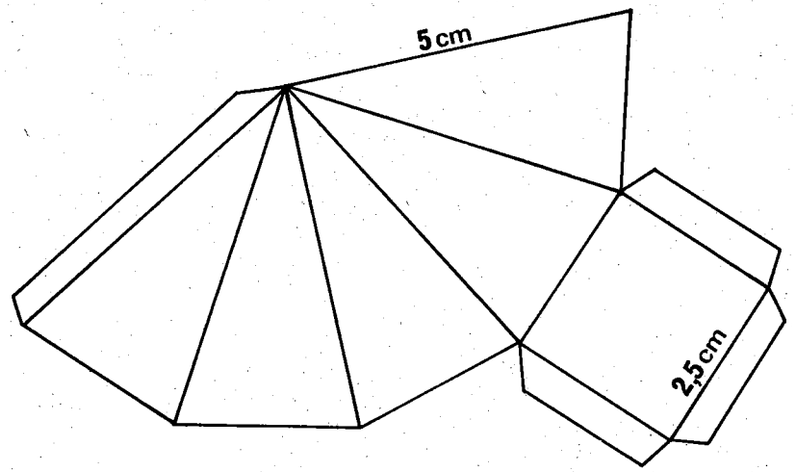
Tüm yüz alanı :

$$A = G + Y = 100 + 260 = 360 \text{ cm}^2 \text{ dir.}$$

Hacmi :

$$H = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400 \text{ cm}^3 \text{ tür.}$$

KARE PİRAMİDİN AÇIK ŞEKLİ



36. Şekil

ALIŞTIRMALAR

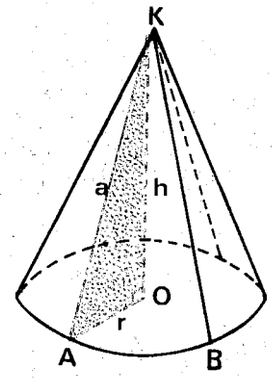
1. Bir kare düzgün piramidin, taban çevresinin uzunluğu 64 cm ve yanal yüz yüksekliği 17 cm dir. Bu piramidin yanal yüz alanını, tümyüz alanını ve hacmini bulunuz.

(Cevap : 544 cm²; 800 cm², 1280 cm³).

2. Tabanı eşkenar üçgen ve yanal kenarları, taban kenarına eşit olan piramide, **düzgün dörtyüzlü** denir.

Bir kenar uzunluğu 6 cm olan düzgün dörtyüzlünün, tüm yüz alanını bulunuz. (Cevap : $36\sqrt{3}$ cm²).

6–5. KONİLER



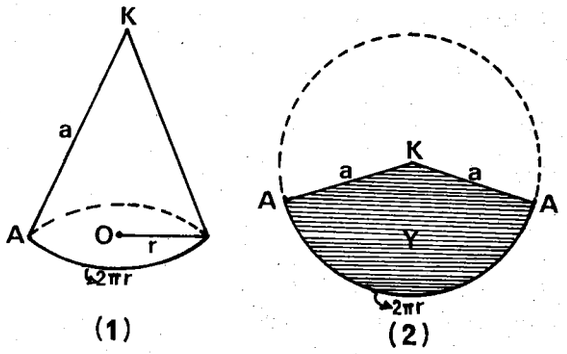
37. Şekil

37. Şekilde gördüğünüz, (O,r) dairesi ile bu daire düzleminin dışında bir K noktası alalım. Öyle ki, [KO] doğrusu parçası daire düzlemine dik olsun. Çembersel bölgenin her noktasını, K noktasına birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu katı cisme **dairesel dik koni** denir. Daireye **taban**, K noktası ile daire çemberi üzerindeki her noktayı birleştiren doğru parçalarının birleşimine **yanal yüz** ve K noktasına koninin **tepesi (köşesi)** denir. Dairesel dik koniyi böyle adlandırmamızın nedeni, tabanın bir daire ve [KO] doğru parçasının daire düzlemine dik olmasındandır. [K0] doğru parçasına, koninin **yüksekliği** denir.

A, çemberin bir noktası ise, $\widehat{KOA}$ nasıl bir üçgendir? Koninin yüksekliği ve taban yarıçapı biliniyorsa, [KA] nı bulabilir miyiz? B, çemberin başka bir noktası ise, $|KA| = |KB|$ midir? K tepe noktasını, çemberin herhangi bir noktasına birleştiren ve sabit uzunlukta olan [KA], [KB],... doğru parçalarına koninin **ana doğrusu** denir.

6–5.1. Dairesel Dik Koninin Alanı

Dairesel dik koninin alanını bulmak için, 38. Şekli inceleyiniz. Şekil (1) deki yanal yüzeyi ayırıp alacak olursak, bu yüzeyin yayılmış biçiminde, Şekil (2) de gördüğünüz daire kesmesini elde ederiz. "Bir daire kesmesinin, dairenin iki yarı çapı ve çemberin bir parçası tarafından sınırlanan bir bölge olduğunu biliyorsunuz".



38. Şekil

Koninin yanal yüzeyinin alanı Y, şekil (2) de gördüğünüz taranmış alanının ölçüsüne eşittir. Şekilde iki tane A harfinin görülmesi, (Şekil (1) deki aynı A noktasından gelmektedir. Koninin yanal alanına eşit olmayan geniş daire kesmesi, noktalarla gösterilmiştir. Koninin ana doğrusunun uzunluğunu gösteren sayı a; yarıçapının uzunluğunu gösteren sayı da r olsun.

Bir dairenin, bir kesmesinin alanı, bu kesmenin yayı ile doğru orantılıdır. Bu nedenle, (K,a) daire çemberinin uzunluğu $2\,\pi\,a$, dairenin alanı $\pi\,a^2$ dir.

Öte yandan Y, taranmış bölgenin alanını birim kare türünden gösteren sayı ve bu alana karşılık yayın uzunluğu da $2\,\pi\,r$ (koninin taban dairesinin çemberinin uzunluğu) olduğuna göre, şu orantıyı yazabiliriz.

$$\frac{2\,\pi\,r}{2\,\pi\,a} = \frac{Y}{\pi\,a^2} \Leftrightarrow (2\,\pi\,a)\,.\,Y = (2\,\pi\,r)\,.\,(\pi\,a^2)$$

$$Y = \frac{(2\,\pi\,r)\,.\,(\pi\,a^2)}{2\,\pi\,a}$$

$$Y = \pi\,r\,a$$

formülü elde edilir. Koninin taban alanı,

$$G = \pi\,r^2$$

olduğundan, tüm yüz alanının formülü;

$$A = G + Y = \pi\,r^2 + \pi\,r\,a$$

ya da

$$A = \pi\,r\,(r + a)$$

olur.

6–5.2. Koninin Hacmi

Özelik : Taban yarıçapının uzunluğu r ve yüksekliğinin uzunluğu h olan bir dairesel dik koninin hacmi,

$$H = \frac{1}{3}\,\pi\,r^2\,h$$

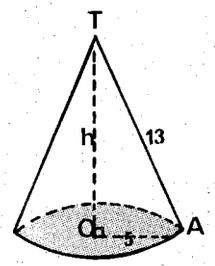
dir.

Uygulamalar :

1. Taban yarıçapının uzunluğu $r = 5$ cm ve ana doğrusunun uzunluğu $a = 13$ cm olan, dairesel dik koninin yanal yüz alanını, tüm yüz alanını ve hacmini π türünden bulunuz.

Çözüm :

39. Şekilde,



39. Şekil

$Y = \pi\,ra = 5.13\,.\,\pi = 65\,\pi\,cm^2$

$G = \pi\,r^2 = 5^2.\,\pi = 25\,\pi\,cm^2$

$A = 25\,\pi + 65\,\pi = 90\,\pi\,cm^2$ dir.

TOA dik üçgeninde, Pisagor bağıntısına göre;

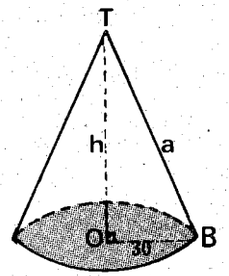
$$h^2 = 5^2 = 13^2 \Leftrightarrow h^2 = 169 - 25 = 144$$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{144} = 12 \text{ cm dir.}$$

$$H = \frac{1}{3}\pi r^2 . h = \frac{1}{3} 5^2 . 12 . \pi = 100 \pi \text{ cm}^3 \text{ tür.}$$

2. Dairesel dik bir koninin taban yarıçapı 30 cm ve hacmi 12000 π cm^3 tür. Yüksekliğini, ana doğrusunun uzunluğunu ve yanal yüz alanını bulunuz.

Çözüm :



40. Şekil

40. Şekle göre,

$$\frac{1}{3}\pi r^2 . h = H$$

$$\frac{1}{3} . 30^2 . \pi . h = 12000 \pi$$

$$\frac{1}{3} . 900 \pi . h = 12000 \pi$$

$$300 \pi . h = 12000 \pi$$

$$300 \pi . h = 12000 \pi \Leftrightarrow h = \frac{12000 \pi}{300 \pi} = 40 \text{ cm dir.}$$

$\overset{\frown}{T0B}$ dik üçgeninde, Pisagor bağıntısına göre;

$a^2 = h^2 + 30^2 = 40 + 900 = 2500$

$a = \sqrt{2500} = 50$ cm dir.

$Y = \pi ra = 30.50 . \pi = 1500 \pi = \text{cm}^2$ dir.

ALIŞTIRMALAR

1. Taban çapının uzunluğu 6 cm, yüksekliği 4 cm olan dairesel dik koninin yanal yüz alanını, tüm yüz alanını ve hacmini π türünden bulunuz.

(Cevap : $Y = 15 \pi$ cm^2, $A = 25 \pi$ cm^2, $H = 12 \pi$ cm^3).

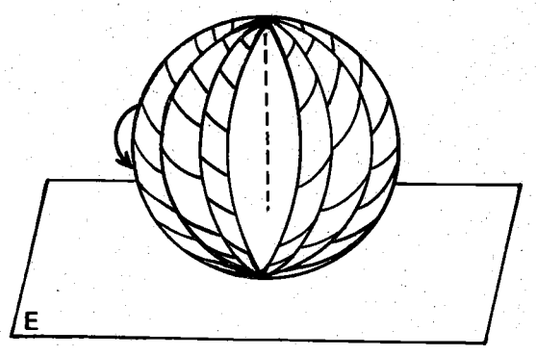
2. Ana doğrusunun uzunluğu 17 cm, yüksekliği 15 cm olan dairesel dik koninin, yanal yüz alanı ve hacmini π türünden bulunuz.

(Cevap : $Y = 136 \pi$ cm,^{2} $H = 320 \pi$ cm^3).

3. Bir minarenin tepesi, dairesel dik koni biçiminde olup, minarenin taban çapı 3 m ve yanal yüz alanı 5,85 π m^2 dir. Minare tepesinin hacmini, π türünden bulunuz. (Cevap : 2,7 π m^3).

6–6. KÜRE

Madeni bir parayı, (bir, ikibuçuk ya da beş lira) düzgün bir yüzey üzerinde, parmağınızla üstten bastırarak düzleme dik olacak biçimde durdurunuz ve hızla döndürünüz. Görüntü 41. Şekilde gördüğünüz gibi, bir futbol topuna benziyor mu? Bu deneyde :



41. Şekil

a) Paranın kenarı nasıl geometrik bir şekildir? (Çemberin tanımını hatırlayınız).

b) Dönen kenarların oluşturduğu geometrik şeklin yüzeyleri için, ne düşünürsünüz?

c) Dönen kenarların oluşturduğu geometrik cismin, bir kalınlığı var mıdır?

d) Bu şeklin boyutları için, ne düşünürsünüz?

e) Dairenin tanımını hatırlayınız. Bu görüntüyü, bir çapı dolayında döndürülen yarım daireden yararlanarak tanımlayınız.

f) Dönen paranın yüzeyi olan dairenin, O merkezi ve r yarıçapı ile elde ettiğiniz görüntünün, tüm noktaları arasında bir bağıntı kurmaya çalışınız.

g) Para yüzeyi olan dairenin, O merkezi, r yarıçapı ve elde ettiğiniz görüntüde; r den küçük, r ye eşit, r den büyük olan nokta kümeleri için, birer tanım yapınız.

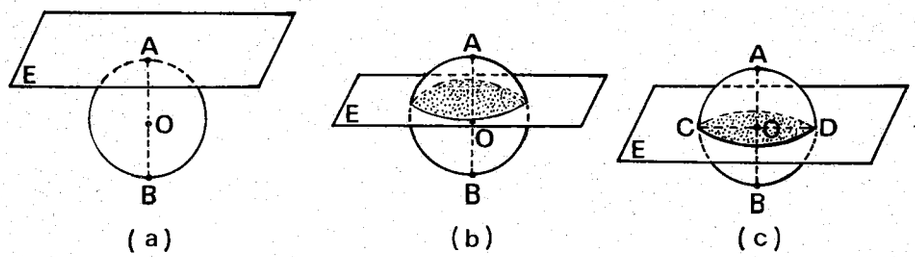
Uzayda verilen bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların oluşturduğu kümeye, **küre yüzeyi** ve verilen noktaya da **kürenin merkezi** denir.

Küre yüzeyinin bir noktasını, kürenin merkezine birleştiren doğru parçasına **yarıçap**, uçları küre yüzeyinde olup, merkezden geçen doğru parçasına da kürenin **çapı** denir.

Küre merkezine olan uzaklığı, yarıçaptan küçük olan noktalarla küre merkezinin içi ile küre yüzeyinin birleşiminden oluşan dolu cisme **küre** denir.

İyice şişirilmiş bir top, bilye, küre için birer örnektir. Küre biçiminde olup, çeşitli işlerde yararlandığımız birçok eşya bulunmaktadır. Bilyeli yataklarda olduğu gibi, bunlardan bazılarının, endüstride oldukça önemli bir yeri vardır.

6–6.1. Büyük ve Küçük Daireler



42. Şekil

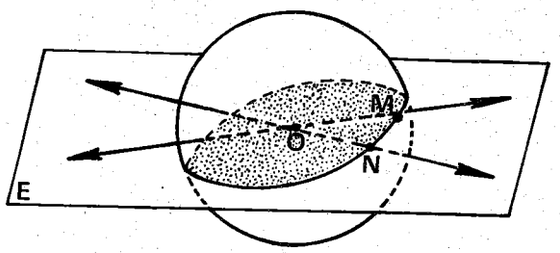
Yukarıdaki şekillerde, bir düzlemle bir kürenin durumlarını görüyorsunuz. Her durumu açıklayınız.

Küreye, bir noktada değen ya da küreyi bir noktada kesen bir düzleme, kürenin bu noktadaki **teğet düzlemi** denir. (42. Şekil (a)).

Kürenin, bir düzlemle arakesiti bir **dairedir**. (42. şekil (b)). O halde, bir küre ile bu küreyi kesen bir düzlemin arakesit kümesi, bir daire ya da yalnız bir noktadır.

Bir küre ile bu kürenin merkezinden geçen bir düzlemin arakesitine, kürenin **büyük dairesi**, bu dairenin çemberine de kürenin **büyük çemberi** denir. (42. Şekil (c)).

Bir küre yüzeyi üzerinde alınan, fakat; ikisi aynı çapın uç noktaları olmayan, herhangi iki noktadan yalnız bir büyük daire geçer.



43. Şekil

a) Yukarıdaki 43. Şekilde gördüğünüz gibi, bir küre yüzeyinde ikisi aynı çapın uçları olmayan M ve N noktalarını alalım.

b) M ve N aynı çapın uç noktaları olmadığından, kürenin O merkezi ile M den geçen bir doğru, N den geçmez. Aynı nedenle, NO doğrusu da M den geçmez.

c) Doğrusal olmayan M, N ve O noktalarından yalnız bir düzlem geçer.

d) M, N ve O noktalarından geçen tek düzlem üzerinde, merkezi O olan yalnız bir büyük daire vardır. Bu büyük daire, M ve N noktalarından geçen tek büyük dairedir.

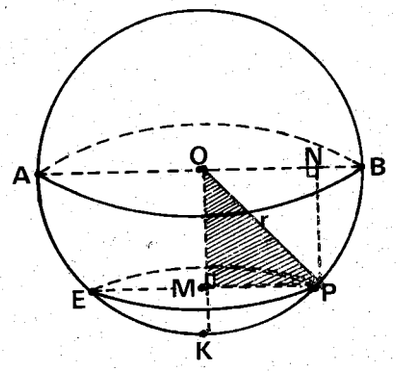
Bir kürenin, iki büyük çemberinin kesişme noktaları ile küre merkezi doğrusal mıdır?

Öyleyse, bir kürenin iki büyük dairesinin arakesiti, o kürenin çapına eşit midir? Başka bir deyişle, bir kürenin iki büyük çemberi, bir çapın uç noktalarında mı kesişirler?

O halde, bir kürede, paralel büyük daireler olabilir mi?

Kürenin büyük dairelerinden başka, diğer dairelerine **küçük daireler,** bu dairenin çemberlerine de kürenin **küçük çemberleri** denir.

6–6.2. Bir Küçük Çemberin Uzunluğunun Hesaplanması



44. Şekil

44. Şekilde gördüğünüz gibi, O merkezli bir küre ile bu kürenin $|EP|$ çaplı küçük dairesini gözönüne alalım.

Küre merkezinden, küçük daire düzlemine inilen dik doğru, (OK doğrusu) küçük dairenin M merkezinden geçer.

Öyleyse, $[OM] \perp [PM]$ olur mu? (Kesim, 6–2.3 deki, bir düzleme dik doğru özeliğini hatırlayınız).

Buradan, $\widehat{OMP}$ dik üçgeninde, pisagor bağıntısına göre;

$$|MP|^2 = |OP|^2 - |OM|^2$$

olur. P noktası, küre yüzeyi üzerinde olduğu için, $|OP| = r$ dir. $|OM| = d$ dersek,

$$|MP|^2 = r^2 - d^2 \Leftrightarrow |MP| = \sqrt{r^2 - d^2}$$

olur. Buradan, $|MP|$ yarıçaplı küçük dairenin çemberinin Ç çevre uzunluğu;

$$Ç = 2\pi \cdot \sqrt{r^2 - d^2}$$

bağıntısı ile hesaplanabilir.

6–6.3 Küre Yüzeyinin Alanı

Özelik : Yarıçapı r olan bir kürenin alanı,

$$A = 4\pi r^2$$

dir.

6.6.4. Kürenin Hacmi

Özelik : Yarıçapı r olan bir kürenin hacmi,

$$H = \frac{4}{3}\pi r^3$$

tür.

Örnek :

Bir futbol topunun yarıçapı 15 cm dir. Bu topun, yüz alanı ve hacmini bulalım. ($\pi \approx 3.1\,4$).

Çözüm :

$A = 4\,\pi\,r^2 = (4.3{,}14) \cdot 15^2 = 12{,}56 \cdot 225 = 2826$ cm² dir.

$$H = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3 = \left(\frac{4}{3} \cdot 3{,}14\right) \cdot 15^3 = \frac{12{,}56}{3} \cdot 3375$$

$H = 12{,}56 \cdot 1125 = 14130$ cm³ tür.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki yarıçap uzunlukları verilen kürelerin, alan ve hacimlerini, π türünden bulunuz.

a) $r = 3$ cm b) $r = 1{,}2$ dm c) $r = 6$ cm

d) $r = 10$ cm e) $r = 8$ mm f) $r = 4{,}4$ dm

2. Küre biçimindeki bir benzin deposunun çapı 48 dm dir. ($\pi \approx 3{,}14$ alınız).

a) Bu deponun yüzeyi kaç m^2 dir? (Cevap : 72,3456 m^2).

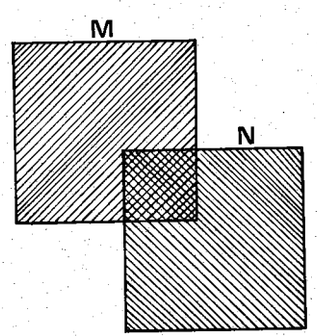
b) 1 dm^3 benzin, yaklaşık bir değerle 0,9 kg olduğuna göre, bu depo, kaç ton benzein alır? (Cevap : 52 ton).

ALTINCI BÖLÜMÜN TEST SORULARI

1. x, pozitif bir sayı olmak üzere, uzunluğu $(x + 4)$, genişliği $(x + 1)$ olan bir dikdörtgenin alanını; aşağıdaki ifadelerden hangisi belirtir?

a) $x^2 + 4x + 4$ b) $x^2 + 5x + 4$ c) $2x^2 + 4$

d) $x^2 + 5x + 5$ e) $x^2 + 4x + 1$

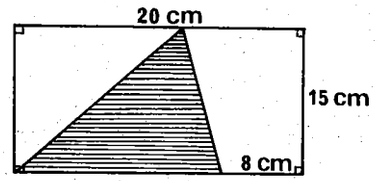


45. Şekil

2. 45. Şekildeki M ve N kareleri eştir. M ∪ N nin alanı 400 cm^2, M ∩ N nin alanı 50 cm^2 olduğuna göre, M karesinin bir kenarının uzunluğu kaç cm dir?

a) $10\sqrt{5}$ cm b) 20 cm c) $5\sqrt{10}$ cm

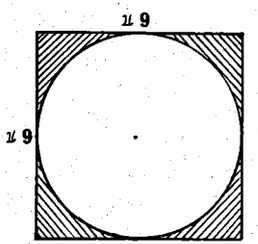
d) $5\sqrt{7}$ cm e) 15 cm



46. Şekil

3. 46. Şekildeki taralı bölgenin alanı kaç cm^2 dir?

a) 90 cm^2 b) 60 cm^2 c) 75 cm^2 d) 84 cm^2 e) 180 cm^2



Şekil. 47

4. 47. Şekildeki taralı bölgenin alanı kaç birim karedir?

a) $3\pi^2$ b) 9π c) $9\pi^2(4 - \pi)$

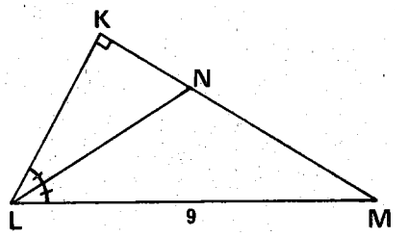
d) $9\pi^2(3 - \pi)$ e) $3\pi^2(12 - \pi)$

5. Çapı 24 cm olan bir kurşun küre, eritilerek, çapı 6 cm olan küreler elde ediliyor. Kaç tane küre elde edilir?

a) 16 b) 48 c) 36 d) 64 e) 27

6. Bir karenin kenarı, uzunluğunun % 20 si kadar artırılırsa, alanı yüzde kaç artar?

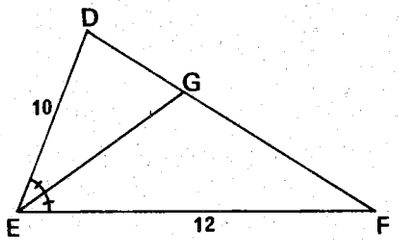
a) % 44 b) % 40 c) % 33 d) % 20 e) % 50



48. Şekil

7. 48. Şekilde, [E G] , E açısının açıortayıdır. A (E F G) = 42 cm² ise, D E F üçgeninin alanı kaç cm² dir?

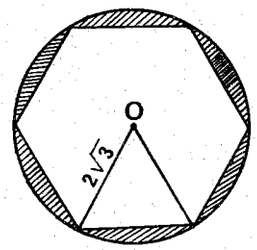
a) 72 cm² b) 77 cm² c) 84 cm² d) 62 cm² e) 67 cm²



49. Şekil

8. 49. Şekildeki KLM dik üçgeninde, [LN] açıortay, | KN | = 4 cm ve | LM | = 9 cm olduğuna göre; NLM üçgeninin alanı kaç cm² dir?

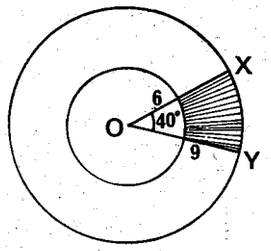
a) 36 cm² b) 45 cm² c) 20 cm² d) 18 cm² e) 27 cm²



50. Şekil

9. 50. Şekildeki çember ile düzgün altıgen arasındaki taralı bölgenin alanı kaç birim karedir?

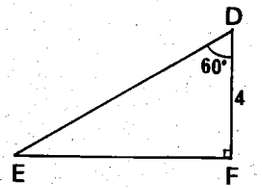
a) $6(2\pi - \sqrt{3})$ b) $4(3\pi - 2\sqrt{3})$ c) $6(2\pi - 3\sqrt{3})$
d) $6(3\pi - 2\sqrt{3})$ e) $4(3\pi - \sqrt{3})$



51. Şekil

10. 51. Şekildeki XOY merkez açısının ölçümü 40° olduğuna göre, taralı bölgenin alanı kaç birim karedir?

a) 4π b) 9π c) 6π d) 3π e) 5π



52. Şekil

11. 52. Şekildeki DEF dik üçgeninin alanı kaç birim karedir?

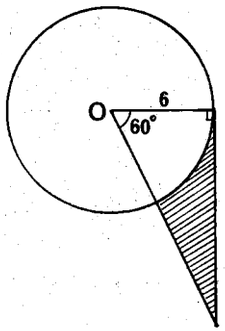
a) $8\sqrt{3}$ b) $\frac{8}{\sqrt{3}}$ c) $16\sqrt{3}$ d) $\frac{16}{\sqrt{3}}$ e) $4\sqrt{3}$

12. Uzunluğu 200 m, genişliği 160 m olan bir bahçenin; uzunluğu ve genişliği % 25 kısaltılırsa, alanı kaç m² küçülür?

a) 18000 m² b) 8375 m² c) 14000m² d) 15500 m² e) 13000 m²

13. Genişliği, uzunluğunun $\frac{3}{4}$ üne eşit olan dikdörtgen biçimindeki bir tarlanın çevre uzunluğu 1400 m dir. Bu tarlanın alanı kaç dekardır?

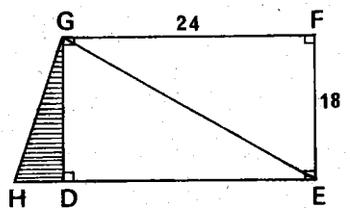
a) 160 b) 120 c) 480 d) 240 e) 1200



53. Şekil

14. 53. Şekildeki taralı bölgenin alanı kaç birim karedir?

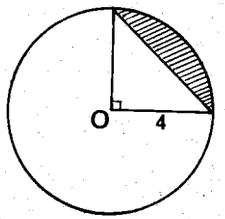
a) $3(3\sqrt{3}-\pi)$ b) $6(6\sqrt{3}-\pi)$ c) $9(2\sqrt{3}-\pi)$
d) $9(4\sqrt{3}-\pi)$ e) $6(3\sqrt{3}-\pi)$



54. Şekil

15. 54 Şekilde, $|EG| = |EH|$ dir. Taralı bölgenin alanı kaç birim karedir?

a) 72 b) 108 c) 54 d) 90 e) 48



55. Şekil

16. 55. Şekildeki taralı bölgenin alanı kaç birim karedir?

a) $4(2-\pi)$ b) $4(\pi-2)$ c) $4(4-\pi)$ d) $8(2-\pi)$ e) $8(\pi-2)$

17. Köşegen uzunlukları $6\sqrt{3}$ cm ve $4\sqrt{12}$ cm olan bir eşkenar dörtgenin alanı kaç cm^2 dir?

a) 144 cm^2 b) 64 cm^2 c) 72 cm^2 d) 128 cm^2 e) 90 cm^2

18. Taban ayrıtları 12 cm, 9 cm ve yüksekliği 15 cm olan bir dikdörtgenler prizması $\frac{2}{3}$ üne değin su ile doludur. Bu suya, bir ayrıtı 6 cm olan demir bir küp atılırsa, su yüzeyi kaç cm yükselir?

a) 4 cm b) 2 cm c) 3 cm d) 2,5 cm e) 5 cm

19. Taban yarıçapı 8 cm olan bir dairesel dik koninin, yanal yüz alanının $\frac{3}{4}$ ü 60π cm^2 dir. Bu koninin anadoğrusunun uzunluğu kaç cm dir?

a) 10 cm b) 8 cm c) 20 cm d) 16 cm e) 12 cm

20. Alanı 324π cm^2 olan bir kürenin çapı kaç cm dir?

a) 9 cm b) 12 cm c) 24 cm d) 18 cm e) 27 cm

S Ö Z L Ü K

Açı : Aynı doğru üzerinde olmayan, başlangıç noktaları ortak iki ışının birleşim kümesi.

Açıortay : Bir açının köşesinden geçen ve açıyı ölçümleri eş iki açıya ayıran ışın.

Açık Önerme : İçinde bilinmeyen bulunan önerme.

Alan : Basit eğri ile sınırlı yüzey parçasının ölçümü.

Alt Küme : Bir kümenin küme parçaları.

Apsis : Koordinat düzlemindeki bir sıralı ikilinin (bir noktanın koordinatlarının) birinci terimi.

Apsis ekseni : Koordinat düzlemindeki yatay eksen, x ekseni.

Asal çarpanlara ayırma : Herhangi bir sayma sayısını, asal çarpanlarının çarpımı olarak yazma.

Asal Sayı : Çarpanlarının kümesi iki elemanlı olup, bu elemanların biri 1, diğeri sayının kendisi olan sayma sayısı.

Aykırı doğrular : Düzlemsel olmayan doğrular.

Ayrık Kümeler : Ortak elemanları olmayan kümeler.

Ayrık (Bağımsız) olay : Aynı anda meydana gelmeyen olaylar. Örneğin, bir torbadaki değişik renkli ve aynı büyüklükteki bilyelerden, ard arda gelişi güzel çekilen bilye olaylarından her biri gibi.

– B –

Basitçeli : En sade geometrik şekil.

0 – Basitçeli : Elemanı yalnız bir nokta olan küme.

1 – Basitçeli : Doğru parçası.

2 – Basitçeli : Üçgen ve içinin oluşturduğu küme (üçgensel bölge).

3 – Basitçeli : Dörtyüzlü ile içinin oluşturduğu küme.

Basit kapalı eğri : Herhangi bir noktadan yalnız bir kez geçmek üzere, çizime başlanılan noktada bitirilen eğriler.

Birleşik önerme : Birden fazla önermeden oluşan önerme.

Bire–bir eşleme : İki kümenin elemanları arasında, bir elemana karşı yalnız bir eleman alınarak yapılan eşleme.

Birleşim işlemi : (∪) : İki kümenin tüm elemanlarının oluşturduğu kümenin bulunması işlemi.

Birleşim kümesi : İki yada daha fazla kümelerin tüm elemanlarının oluşturduğu küme.

Birleşme Özeliği : Bir A kümesinde bir ★ işlemi verildiğinde, her $x, y, z \in A$ için $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$ olması.

Büyük Çember : Kürenin, büyük dairesinin çemberi.

Büyük daire : Bir küre ile bu kürenin merkezinden geçen bir düzlemin arakesiti.

– Ç –

Çap : Dairenin merkezinden geçen ve uç noktaları dairenin çevresi üzerinde bulunan doğru parçası.

Çember : Düzlemde, bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların oluşturduğu küme.

Çift sayı : 2 nin katı olan doğal sayı.

– D –

Dağılma Özeliği : A kümesinin elemanları arasında tanımlı "★ ve Δ" işlemleri verilsin, Her $a, b, c \in A$ için,

$a \star (b \Delta c) = (a \star b) \Delta (a \star c)$"

ise; "★" nin, "Δ" işlemi üzerine dağılma özeliği vardır.

Daire : Çember ile iç bölgesinin birleşim kümesi.

Değişme özeliği : Verilen bir kümenin herhangi iki elemanı arasında yapılan bir işlemde, bu elemanların yerleri değiştirildiğinde, aynı sonucun elde edilmesi.

Düzgün çokgen : Köşeleri bir çember üzerinde olup, tüm kenarları ve açıları eş olan çokgen.

Denk kümeler : Eleman sayıları eşit olan kümeler.

– E –

Eleman : Bir kümeyi oluşturan nesnelerden her biri.

Eşit Kümeler : Elemanları aynı olan kümeler.

Etkisiz (Birim) Eleman : Bir kümede bir eleman ile diğer elemanlar arasında aynı işlem uygulandığında, daima diğer elemanlar elde ediliyorsa, o eleman, bu işlemin etkisiz (birim) elemanıdır.

Örneğin : $A = \{0, 1, 2, 3\}$ **kömesinde;**

$2.1 = 1.2 = 2$

$0.1 = 1.0 = 0,\ 1.3 = 3.1 = 3 \Rightarrow 1$

elemanı, A kümesinin "." işlemine göre etkisiz elemanıdır.

Evrensel Küme : Bir deneyde, çıkması olası olan tüm çıkanların kümesi.

– F –

Faiz : Bankaya yatırılan bir paranın belirli bir zaman sonunda sağladığı kazanç.

– H –

Hacim : Bir cismin uzayda doldurduğu uzay parçası.

– İ –

İkili : İki nesnenin oluşturduğu eleman.

İkili İşlem : Bir kümenin iki elemanından, bu kümede tanımlı belli bir işleme göre üçüncü bir elemanın elde edilmesi.

İskonto : Satılan bir malın, satış fiyatı üzerinden, satıcının alıcıya yaptığı indirim.

– K –

Kapalı bölge : Basit bir kapalı eğri üzerindeki tüm noktalarla bu eğri içindeki tüm noktaların oluşturduğu küme.

Örneğin : Üçgensel bölge, dörtgensel bölge, daire gibi.

Kapalılık Özeliği : Bir kümenin elemanları arasında tanımlanan bir işlem ile elde edilen sonuçların tümünün, o kümenin elemanı olması.

Kapsama : Sınırları içine alma.

Karşılaştırma özeliği : İki geometrik şekil ya da kümenin, aynı cinsten olmak koşulu ile ölçme anlamında karşılaştırılabilmesi.

Kesen : Çember ile kesişimi iki nokta olan doğru.

Kesişim İşlemi : (∩) : Kümelerin ortak elemanlarının oluşturduğu kümenin bulunması.

Kesişim kümesi : Kümelerin ortak elemanlarından oluşan küme (Arakesit).

Kiriş : Uç noktaları çember üzerinde olan doğru parçası.

Komisyon : Yapılan bir alışverişte, aracı olan kimsenin yaptığı hizmet karşılığı aldığı para.

Koordinat düzlemi : Birbirini dik olarak kesen, yönlendirilmiş iki doğrunun belirttiği düzlem.

Küçük Çember : Kürenin, küçük dairesine ait çember.

Küçük daire : Bir küre ile bu kürenin merkezinden geçmeyen bir düzlemin arakesiti.

Küre : Uzayda, sabit bir noktadan eşit uzaklıktaki noktalar kümesi.

Kürenin içi : Kürenin, merkezine olan uzaklığı yarıçaptan küçük olan noktalarla küre merkezinin birleşim kümesi.

– N –

Nicelik : Bir şeyin sayılabilen, ölçülebilen veya azalıp çoğalabilen hali.

– O –

Olasılık : Bir olayın olabilme şansını belirten sayı.

Oran : İki kümenin eleman sayıları veya iki ölçü arasındaki karşılaştırma.

Orantı : Her a, b, c, d birer gerçek sayı olmak üzere $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eşitliği.

Ortak bölen : Birden fazla sayma sayısını kalansız olarak bölen sayı ya da sayılar.

Ortak bölenleri en büyüğü (obeb) : Birden fazla sayma sayısını, kalansız olarak bölebilen en büyük sayı.

– Ö –

Önerme : Doğru ya da yanlış, kesin bir hüküm belirten ifade.

– S –

Sıralı ikili : Verilen iki kümenin, önce birincisinden, sonra ikincisinden alınan elemanlarla oluşturulan ikililerden her biri.

Simge : Danışıklı bir anlamı olan resim, harf gibi işaret.

– P –

Permütasyon : Bir kümenin ya da küme parçalarının elemanlarının belli bir sıraya göre dizilişleri.

Sonsuz küme : Elemanları sayılamayan küme.

Sonlu küme : Elemanları sayılabilir küme.

– T –

Teğet : Çember ile kesişimi bir nokta olan doğru.

Teğet düzlemi : Küre ile kesişimi bir nokta olan düzlem.

Tek sayı : Çift olmayan doğal sayı.

Ters eleman : Bir işlem ile o işlemin etkisiz elemanını veren iki eleman, o işleme göre ters elemandır.

Örneğin : $-4 + 4 = 0$ ise, -4 ile 4, "+" işlemine göre ters elemanlardır.

– Ü –

Üçgen : Doğrusal olmayan üç noktayı birleştiren üç doğru parçasının oluşturduğu küme.

Üçgensel bölge : Üçgen ile iç bölgesinin birleşim kümesi.

– Y –

Yarı çap : Çemberin bir noktası ile merkezini birleştiren doğru parçası.

Yay : Çember üzerinde alınan iki nokta ile bu noktalar arasındaki çember parçası.

– Z –

Zarar : Alışveriş işleminin kaybettirdiği para.

MATEMATİK

LİSE I

Yazanlar

Muammer GÜRDAL
G. E. E. Matematik Öğretmeni

Faruk AYDAN
Fen Lisesi Emekli Matematik Öğretmeni

Ekrem METİN
G. E. E. Matematik Öğretmeni

BİRİNCİ BASILIŞ

M.E.B.
DEVLET KİTAPLARI

TÜRK TARİH KURUMU BASIMEVİ, ANKARA, 1978